This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

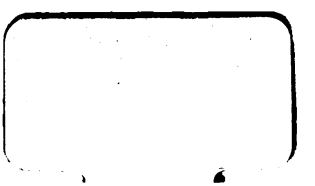
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Engin.
TJ
210
.C353

A 780,205



Theorie

der

Biegungs- und Torsions-Federn

von

A. Castigliano
Ingenieur der ober-italienischen Eisenbahnen.

Aus dem Italienischen übersetzt von

Richard Totz
Ingenieur.

Mit einer Tafel.

Wien.
Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.
1888.

IGIN. LIBRARY

TJ
210
.C353

Engin
Stator
8-31-28
17256

Vorrede.

Nachdem in früheren Schriften die Theoreme der minimalen Arbeit und der Derivaten der Deformationsarbeit behandelt, und davon bei Lösung praktischer Aufgaben bezüglich des Gleichgewichtes elastischer Systeme Gebrauch gemacht wurde, war es natürlich, dass der Autor auch andere Anwendungen derselben Theorie machen wollte, um den Kreis seiner Untersuchungen möglichst vollständig zu gestalten.

Von einem der Probleme über das elastische Gleichgewicht der Federn, dessen Untersuchung ihm interessant schien, sind hier die Resultate gegeben; dieser Stoff wurde um so anziehender, als bis jetzt nur unvollständige Abhandlungen darüber existiren, nachdem sich bei einigen, selbst neuen Autoren bedeutende Fehler vorfinden; beispielsweise setzt Herr V. Contamin, Professor an der Centralschule in Paris, in seinem „Cours de résistance appliquée“ [1]), indem er im §. 48 (pag. 485) die Theorie der zusammengesetzten Blattfedern gibt, voraus, dass die Blätter immer in Berührung bleiben und der ganzen Länge nach aufeinander drücken, ohne sich gewahr zu werden, dass diese Bedingung in der Praxis niemals eintritt, und vielleicht auch niemals erfüllt werden kann.

Deshalb sucht der Autor in der hier gegebenen Theorie der Federn immer die grösste Strenge bei Ableitung der Resultate einzuhalten, und auch dann, wenn die Vernachlässigung einiger Ausdrücke nützlich scheint, um zu praktisch genügend einfachen Formeln zu gelangen, wird in

[1]) Paris 1878, J. Déjey & Cie.

strenger Weise darauf gesehen, dass die vernachlässigten Ausdrücke im Verhältnisse zu den beibehaltenen thatsächlich sehr klein sind.

Diese Art des Vorganges ist wohl etwas länger als jene unvollständige, welche gewöhnlich zur Anwendung gelangt, hat aber den Vortheil, klarer zu sein und keinen Zweifel über die Exactheit der Resultate aufkommen zu lassen; ferner führt dieselbe zur Aufdeckung besonderer und wichtiger Eigenschaften, welche nach den alten Methoden unbemerkt bleiben.

Natürlich kann der Autor nicht annehmen, jenen Grad von Vollkommenheit erreicht zu haben, der ihm vorschwebte; immerhin hofft er aber, dass sein Bestreben nicht ohne Nutzen für die Ausbildung dieses Zweiges der Theorie der elastischen Systeme sein wird.

THEORIE DER FEDERN.

I. Capitel.

Einfache Blattfeder.

1. Allgemeine Betrachtungen bezüglich der Theorie der Federn. — Die Federn sind gewöhnlich aus gehärtetem Stahle erzeugt und werden meistens angewendet, um die Wirkung von Erschütterungen oder Stössen zu mässigen, wie bei Fuhrwerken, oder auch um eine Bewegung zu erzeugen, wie bei Uhrwerken.

Die Federn unterscheiden sich von anderen elastischen Körpern, welche man in den Abhandlungen über Elasticität studirt, nur dadurch, dass ihre Deformationen verhältnissmässig sehr gross sind, und zwar derart, dass in einigen Fällen die schliesslichen Coordinaten mit den ursprünglichen nicht als gleich betrachtet werden können, wenn man die normalen und tangentialen Componenten der äusseren Kräfte bezüglich der Querschnitte der Feder, oder die Momente bezüglich der Haupt-Trägheitsachsen derselben Querschnitte aufsucht.

Wenn dagegen die Form der Feder oder die Lage der angreifenden Kräfte mit einem genügenden Grade von Annäherung die Annahme zulassen, dass sich die Lage dieser Kräfte in Bezug auf die verschiedenen Querschnitte während der Deformation nicht ändert, so wird die Berechnung der Federn genau wie jene anderer elastischer Körper durchgeführt.

Wir müssen hier noch anführen, dass man gehärteten Stahl zur Erzeugung von Federn verwendet, weil derselbe die werthvolle Eigenschaft besitzt, fast bis zur Bruchgrenze vollkommen elastisch zu bleiben und selbst nach bedeutenden Deformationen wieder die ursprüngliche Gestalt anzunehmen, wenn die Einwirkung der äusseren Kräfte aufhört.

Dank dieser Eigenschaft des gehärteten Stahles kann man bei der Berechnung von Federn einen sehr hohen Widerstands-Coëfficienten anwenden, gewöhnlich 40 *kg* per mm^2, manchmal auch bis 60 *kg*.

Für den Elasticitäts-Coëfficienten des gehärteten Stahles wurden bei verschiedenen Versuchen verschiedene Resultate erhalten. Der grössere Theil der Experimente ergab denselben etwas höher als 20.000 *kg* per mm^2 oder etwas höher als jenen des nicht gehärteten Stahles oder des Eisens, während bei einigen 30.000 *kg* per mm^2 dafür gefunden wurde. Für praktische Berechnungen kann man $E = 21.000$ *kg* per mm^2 setzen.

Den tangentialen Elasticitäts-Coëfficienten kann man mit $\frac{2}{5} E$ annehmen, wie für isotrope Körper, und erhält daher $F = 8400$ *kg* per mm^2.

2. Rechteckige Blattfeder. — Wir werden Blattfedern jene nennen, welche mit Bezug auf ihren Mittelpunkt symmetrisch, in demselben unterstützt und an den Enden von zwei gleichen Gewichten belastet sind; daher genügt es offenbar für das Studium, wenn man nur eine Hälfte als fest eingespannt und am Ende durch ein Gewicht belastet annimmt.

Nun betrachten wir eine Stahlplatte AB, geradlinig und von constantem Querschnitte (Fig. 1*a*), welche an dem einen Ende A horizontal eingespannt ist, und am anderen Ende durch ein nach und nach angebrachtes Gewicht belastet wird.

Nennen wir

P das totale in B wirkende Gewicht,

b und c die Breite und Höhe des rechteckigen Querschnittes der Platte,

$I = \frac{1}{12} b c^3$ das Trägheitsmoment des Querschnittes,

l die Länge der Platte,

E den Elasticitäts-Coëfficienten;

wir vernachlässigen den Einfluss der transversalen Verschiebung, welcher bei einem solchen Körper, wie der betrachtete, in Bezug auf die Biegung sehr gering ist.

Das Biegungsmoment in einem Querschnitte in der Entfernung x von der Befestigungsstelle ist:

$$M = P (l - x)$$

und die Maximal-Beanspruchung in jenem Querschnitte:

$$T = \frac{P(l-x)\frac{c}{2}}{\frac{1}{12}bc^3} = 6\frac{P(l-x)}{bc^2}.$$

Dieser Ausdruck erreicht für $x = 0$ sein Maximum und wird

$$T = 6\frac{Pl}{bc^2}.$$

Die Deformationsarbeit der Platte ist

$$\int_0^l \frac{M^2\,dx}{2EI} = \frac{P^2}{2EI}\int_0^l (l-x)^2\,dx = \frac{P^2 l^3}{6EI};$$

nachdem die Pfeilhöhe oder Senkung des Punktes B die Derivate der Deformationsarbeit bezüglich P ist, so folgt daraus:

$$f = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{4Pl^3}{Ebc^3},$$

oder wenn man P aus diesem Ausdrucke und jenem für den Maximalzug T eliminirt:

$$f = \frac{2}{3}\frac{l^2 T}{cE}.$$

3. Gerade Feder von gleichem Widerstande. — Wir betrachten eine gerade, horizontale Feder, welche sich von der vorigen nur dadurch unterscheidet, dass der Querschnitt derart variabel ist, dass die specifische Maximal-Beanspruchung in allen Querschnitten dieselbe bleibt.

Wir haben die specifische Maximal-Spannung in irgend einem Querschnitte gefunden mit:

$$T = 6\frac{P(l-x)}{bc^2};$$

damit dieser Ausdruck constant bleibt, muss sein

$$bc^2 = \alpha(l-x),$$

wobei α ein constanter Werth ist.

Man kann dieser Bedingung auf mehrere Arten genügen; wenn man eine constante Dicke der Feder beibehält, muss die Breite b proportional mit $l - x$ wachsen, wonach eine Platte von einer Dreieckform resultirt. Behält man dagegen die Breite constant bei, so muss die

Dicke proportional mit der Quadratwurzel von $l - x$ variiren, d. h. das Profil der Feder in einer verticalen Ebene muss ein Bogenstück der gewöhnlichen Parabel sein.

Es ist aber zu bemerken, dass diese beiden Formen der Federn wohl bezüglich des Widerstandes, aber nicht bezüglich der Biegsamkeit einander gleich sind. Nennt man M das Biegungsmoment und I das Trägheitsmoment eines Querschnittes, so ist die Deformationsarbeit eines Körperelementes zwischen dem betrachteten und einem unendlich nahen Querschnitte gleich $\frac{M^2 ds}{2EI}$, wobei ds das Element der Körperachse zwischen jenen beiden Querschnitten ist. Die Derivate der Deformationsarbeit mit Bezug auf das Moment M ergibt die Drehung des ersten Querschnittes gegen den zweiten; sind $d\varepsilon$ und $d\varepsilon'$ die unendlich kleinen Winkel zwischen den beiden Querschnitten vor und nach der Deformation, so haben wir

$$d\varepsilon' - d\varepsilon = \frac{M}{EI} ds;$$

nachdem aber $d\varepsilon'$ und $d\varepsilon$ die Contingenzwinkel der von der Körperachse vor und nach der Deformation gebildeten Curve sind, so ist $\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{1}{\varrho}$, $\frac{d\varepsilon'}{ds} = \frac{1}{\varrho'}$, wobei ϱ und ϱ' die correspondirenden Krümmungsradien sind; folglich ergibt sich auch

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EI}.$$

Damit zwei Körper, welche zwei vollkommen gleiche Curven als Achsen haben und gleich belastet sind, sich derart deformiren, dass die Curven der Achsen auch nach der Deformation gleich sind, muss die Veränderung des Contingenzwinkels für zwei correspondirende Punkte dieselbe sein, und daher auch der Werth $\frac{M}{EI}$ gleich, oder einfach die Trägheitsmomente in den correspondirenden Punkten gleich sein, weil die Momente M und der Elasticitäts-Coëfficient gleich angenommen wurden.

Im Falle einer dreieckigen Platte von constanter Dicke (Fig. 2*a*) erhält man, wenn b die Breite an der Befestigungsstelle und c die Dicke

ist, für einen Querschnitt in der Entfernung x von der Befestigungsstelle die Breite

$$\frac{b}{l}(l - x),$$

und daher das Trägheitsmoment

$$I = \frac{bc^3}{12}\frac{l - x}{l}.$$

Wenn dagegen der Querschnitt die constante Breite b behält und die Dicke nach dem Gesetze einer Parabel variirt, wobei wir b und c die Breite und Dicke des befestigten Querschnittes nennen, so wird die Höhe eines Querschnittes in der Entfernung x von der Einspannstelle

$$c\sqrt{\frac{l - x}{l}}$$

und das Trägheitsmoment dieses Querschnittes:

$$I = \frac{bc^3}{12}\frac{l - x}{l}\sqrt{\frac{l - x}{l}}.$$

Dieses Trägheitsmoment ist für irgend einen Werth von x kleiner als jenes für die dreieckige Platte und wird nur für den befestigten Querschnitt gleich. Folglich ist die Platte mit constanter Breite und einer Dicke, welche nach den Ordinaten einer quadratischen Parabel variirt, wenn auch auf Widerstand gleichwerthig, doch bedeutend biegsamer als die dreieckige Platte mit constantem Querschnitte.

Betrachtet man dagegen eine Platte von constanter Breite b und einer Dicke, welche nach den Ordinaten einer cubischen Parabel variirt (Fig. 3 a), derart, dass die Dicke in einer Entfernung x von der Befestigungsstelle gleich

$$c\sqrt[3]{\frac{l - x}{l}}$$

ist, so wird das correspondirende Trägheitsmoment

$$I = \frac{bc^3}{12}\frac{l - x}{l}$$

vollkommen gleich mit jenem der dreieckigen Platte; diese neue Platte ist zwar nicht von gleicher Widerstandsfähigkeit, aber ebenso biegsam wie jene von dreieckiger Form.

Die Formel

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EI},$$

wird

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{M}{EI}$$

und die Feder ist gerade vor der Einwirkung äusserer Kräfte.

Für die dreieckige Platte von constanter Dicke oder für jene von constanter Breite und der Dicke nach den Ordinaten der cubischen Parabel variabel, hat man unter der Voraussetzung, dass das Gewicht P an einem Ende wirkt:

$$M = P(l - x), \qquad I = \frac{bc^3}{12}\frac{l-x}{l},$$

daher

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{12Pl}{Ebc^3},$$

folglich den Krümmungsradius unabhängig von x, d. h. der Körper biegt sich nach einem Kreisbogen.

Die Deformationsarbeit des ganzen Körpers ist

$$\int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2E}\frac{12^2 Pl}{bc^3}\int_0^l (l-x)\,dx = \frac{1}{2E}\cdot\frac{6P^2 l^3}{bc^3},$$

und die Pfeilhöhe der Biegung oder die Senkung des Angriffspunktes des Gewichtes P ist also

$$f = \frac{6Pl^3}{Ebc^3}.$$

Die specifische Maximal-Spannung für die Feder von constanter Breite und der Dicke nach den Ordinaten einer cubischen Parabel variabel ist für einen Querschnitt in der Entfernung x von der Befestigungsstelle

$$T = \frac{P(l-x)\frac{c}{2}\sqrt{\frac{l-x}{l}}}{\frac{1}{12}bc^3\frac{l-x}{l}} = \frac{6Pl}{bc^2}\sqrt[3]{\frac{l-x}{l}};$$

für den eingespannten Querschnitt, oder $x = 0$, gibt diese Formel:

$$T = \frac{6Pl}{bc^2},$$

woraus folgt, dass in allen Querschnitten die specifische Maximal-Beanspruchung geringer ist, als in jenem an der Befestigungsstelle.

Eliminirt man P aus der letzten Gleichung und aus jener, welche die Pfeilhöhe f gibt, so erhält man

$$f = \frac{l^2 T}{cE}.$$

Man ersieht hieraus, dass die dreieckige Feder von constanter Dicke und jene von constanter Breite mit nach den Ordinaten der cubischen Parabel variabler Dicke, bei gleicher Belastung, eine Pfeilhöhe ergeben, welche ein- und einhalbmal so gross ist wie jene der Feder mit constanter Breite und Dicke, bei allen drei Körpern der eingespannte Querschnitt als gleich vorausgesetzt.

Eine für die Folge nützliche Bemerkung fügen wir hier noch an: Die Deformationsarbeit der Feder in den drei oben betrachteten Fällen kann man durch die Formel

$$K \frac{P^2 l^3}{2EI},$$

ausdrücken, wobei mit I das Trägheitsmoment des eingespannten Querschnittes bezeichnet ist; K ist ein Coëfficient, welcher für die prismatische Feder mit $\frac{1}{3}$, für die dreieckige Feder von constanter Dicke und für jene von constanter Breite und nach den Ordinaten einer cubischen Parabel variablen Dicke mit $\frac{1}{2}$ angenommen werden muss.

II. Capitel.

Zusammengesetzte Blattfeder.

4. Beschreibung und Bezeichnungen. — Das Hauptblatt nennen wir jenes von der grössten Länge; alle Blätter der Feder sind gewöhnlich in der Mitte durch ein starkes Band verbunden, in Folge dessen man alle Blätter als fest eingespannt betrachten kann.

Es sei P die Belastung an jedem Ende und l die Länge der Hauptfeder an jeder Seite des Bügels (Fig. 4).

Wir nehmen an, dass die Länge l in n Theile getheilt sei, und dass das unterste Blatt um $\frac{l}{n}$, das folgende um $\frac{2l}{n}$, das dritte um $\frac{3l}{n}$ etc. zu beiden Seiten des Bügels hervorrage. Alle Blätter sind gewöhnlich einfach, mit Ausnahme des Hauptblattes, welches häufig aus zwei oder auch drei gleichen, über einander liegenden Blättern zusammengesetzt ist. Das Hauptblatt behält immer der ganzen Länge nach einen constanten Querschnitt bei, dagegen haben die anderen manchmal constanten Querschnitt, bisweilen ist aber auch jener Theil, welcher über das unterliegende Blatt hervorragt, entweder von constanter Dicke und abnehmender Breite (Fig. 7) oder von gleicher Breite und gegen die Enden zu geschärft.

Wir werden zuerst den Fall betrachten, dass das Hauptblatt einfach und alle übrigen Blätter von gleicher Dicke seien, wobei der Querschnitt eines jeden Blattes in jenem Theile, welcher über das darunter liegende hervorragt, nach irgend einem Gesetze variirt.

Wir werden annehmen, dass sich zuerst das Hauptblatt und nach und nach die anderen biegen, wobei die letzteren nicht der ganzen Länge nach in Berührung bleiben, sondern jedes Blatt drückt nur auf die Enden des darunter liegenden. Wir müssen uns dann versichern, in wie weit diese Annahmen zutreffen, und können somit bei der Behandlung der Aufgabe jenen Grad von Genauigkeit einführen, welcher bisher fehlte.

Wir werden erstes Blatt das kürzeste, zweites Blatt das folgende benennen, und so weiter bis zum Hauptblatte.

Wir bezeichnen mit:

$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$ die Drücke, welche an den Enden des ersten, zweiten, dritten etc. Blattes auftreten,

$l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n, \ldots$ die Länge, um welche ein Blatt von einer Seite des Bügels hervorragt,

λ die Länge, um welche jedes Blatt über das darunter liegende hervorragt,

I das Trägheitsmoment des Querschnittes des Blattes in jener Strecke, wo dasselbe constante Dicke und Breite hat,

E den Elasticitäts-Coëfficienten.

Die Deformationsarbeit, welche in Folge der transversalen Verschiebung auftritt, vernachlässigen wir, weil dieselbe im Verhältnisse zu jener in Folge der Biegung sehr gering ist, nachdem die Blätter mit Bezug auf ihre Länge sehr dünn sind.

Ferner beachten wir, dass die Hervorragung λ eines jeden Blattes über das darunter liegende für alle gleich ist; betrachtet man z. B. das n^{te} Blatt, so kann man die Deformationsarbeit der besagten Hervorragung durch die Formel ausdrücken:

$$\frac{K\lambda^3}{2EI}\, t^2{}_n,$$

wie wir am Ende des vorigen Capitels zeigten, wobei man den Coëfficienten K mit $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{2}$ annehmen muss, je nachdem die Blätter constanten Querschnitt haben, auch in jenem Theile, welcher über die darunter liegenden hervorragt, ferner wenn sie in diesem Theile von dreieckiger Form mit constanter Dicke sind, oder wenn die Breite constant ist und die Dicke nach den Ordinaten der cubischen Parabel variirt.

Die Blattfedern erhalten häufig eine ursprüngliche Krümmung nach einem Kreisbogen (Fig. 9a), nachdem aber diese Krümmung gewöhnlich sehr gering ist, kann man auch auf die gekrümmten Federn alle Betrachtungen und Formeln anwenden, welche wir jetzt für die geradlinigen auseinandersetzen werden.

5. Allgemeine Formeln zur Bestimmung der Drücke an den Enden jedes Blattes. — Wenn wir mit $2L_1$, $2L_2$, $2L_3$ etc. die Deformationsarbeit des ersten, zweiten, dritten etc. Blattes benennen und uns erinnern, dass die Deformationsarbeit eines Körpers mit alleiniger Berücksichtigung der Biegung durch $\int \frac{M^2 dx}{2EI}$ ausgedrückt wird, wobei M das Biegungsmoment des Querschnittes mit der Abscisse x ist, so ergeben sich folgende Formeln:

$$L_1 = \frac{K\lambda^3}{2EI} t^2_1,$$

$$L_2 = \frac{K\lambda^3}{2EI} t^2_2 + \frac{1}{2EI}\int_0^{\lambda} [t_2(2\lambda - x) - t_1(\lambda - x)]^2 \, dx$$

. . . . . .

$$L_n = \frac{K\lambda^3}{2EI} t^2_n + \frac{1}{2EI}\int_0^{(n-1)\lambda} [t_n(n\lambda - x) - t_{n-1}(n\lambda - \lambda - x)]^2 \, dx,$$

$$L_{n+1} = \frac{K\lambda^3}{2EI} t^2_{n+1} + \frac{1}{2EI}\int_0^{n\lambda} [t_{n+1}(n\lambda + \lambda - x) - t_n(n\lambda - x)]^2 \, dx,$$

. . . . . .

Der Ausdruck von L_{n+1} kann auch hier für das Hauptblatt angewendet werden, wenn man P für t_{n+1} setzt und sich erinnert, dass für dasselbe $K = \frac{1}{3}$ zu nehmen ist, nachdem der Querschnitt auch in jenem Theile constant bleibt, welcher über das darunter liegende Blatt hervorragt.

Um die Werthe der Drücke t_1, t_2, t_3, ... etc. zu erhalten, muss man die Differentialquotienten der Deformationsarbeit, mit Bezug auf jene, gleich Null setzen; die Deformationsarbeit der Feder ist:

$$2(L_1 + L_2 + L_3 + \ldots).$$

Jeder von den unbekannten Drücken kommt nur in den Gleichungen der Deformationsarbeit der beiden Blätter vor, zwischen denen die betrachteten Drücke auftreten; z. B. t_1 kommt nur in L_1 und L_2, t_n in L_n und L_{n+1} vor; daher erhält man leicht die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten:

$$\frac{dL_1}{dt_1} + \frac{dL_2}{dt_1} = 0, \ldots\ldots \qquad \frac{dL_n}{dt_n} + \frac{dL_{n+1}}{dt_{n+1}} = 0, \ldots\ldots$$

oder auch, wenn man alle diese Gleichungen mit $\frac{EI}{2}$ multiplicirt:

$$t_1\left[K\lambda^3+\int_0^{\lambda}(\lambda-x)^2\,dx\right]-t_2\int_0^{\lambda}(2\lambda-x)\,(\lambda-x)\,dx=0$$

. . . . . .

$$t_{n-1}\int_0^{(n-1)\lambda}(n\lambda-\lambda-x)(n\lambda-x)\,dx+t_{n+1}\int_0^{n\lambda}(n\lambda+\lambda-x)(n\lambda-x)\,dx$$
$$-t_n\left[K\lambda^3+\int_0^{(n-1)\lambda}(n\lambda-x)^2\,dx+\int_0^{n\lambda}(n\lambda-x)^2\,dx\right]=0$$

. . . . . .

Nun hat man:

$$\int_0^{\lambda}(\lambda-x)^2\,dx=\frac{\lambda^3}{3},$$

$$\int_0^{\lambda}(\lambda-x)\,(2\lambda-x)\,dx=\frac{5}{6}\lambda^3,$$

$$\int_0^{(n-1)\lambda}(n\lambda-\lambda-x)\,(n\lambda-x)\,dx=\frac{(n-1)^2\,(2n+1)}{6}\lambda^3,$$

$$\int_0^{n\lambda}(n\lambda-x)\,(n\lambda+\lambda-x)\,dx=\frac{(2n+3)n^2}{6},$$

$$\int_0^{(n-1)\lambda}(n\lambda-x)^2\,dx=\frac{n^3-1}{3}\lambda^3,$$

$$\int_0^{n\lambda}(n\lambda-x)^2\,dx=\frac{n^3}{3}\lambda^3.$$

Substituirt man diese Resultate in obige Gleichungen und lässt den gemeinsamen Factor λ^3 weg, so ergibt sich:

$$\left(K+\frac{1}{3}\right)t_1-\frac{5}{6}t_2=0$$

. . . . . .

$$\frac{(n-1)^2\,(2n+1)}{6}t_{n-1}-\left(K+\frac{2n^3-1}{3}\right)t_n+\frac{n^2\,(2n+3)}{6}t_{n+1}=0,$$

. . . . . .

Man sieht leicht, dass $n^2(2n+3)$ nichts Anderes ist als der Werth, welchen $(n-1)^2(2n+1)$ annimmt, wenn man n in $n+1$ verwandelt; setzt man daher allgemein:

$$(n-1)^2(2n+1) = A_n$$

und beachtet, dass

$$(n-1)^2(2n+1) + n^2(2n+3) = 4n^3 + 1,$$

so resultirt:

$$A_n + A_{n+1} = 4n^3 + 1;$$

ferner kann man für den Coëfficienten $K + \frac{2n^3-1}{3}$ schreiben $K + \frac{A_n + A_{n+1} - 3}{6}$ und die Gleichung zwischen den Unbekannten t_{n-1}, t_n, t_{n+1} wird

$$A_n t_{n-1} - (6K - 3 + A_n + A_{n+1}) t_n + A_{n+1} t_{n+1} + 0 \qquad (1)$$

Nachfolgend ist eine Serie von Werthen von A_n für $n = 1$ bis $n = 20$ gegeben, nachdem es in der Praxis nicht vorkommen dürfte, dass eine Feder aus mehr als zwanzig Blättern zusammengesetzt ist.

$A_1 = 0$	$A_6 = 325$	$A_{11} = 2300$	$A_{16} = 7425$
$A_2 = 5$	$A_7 = 540$	$A_{12} = 3025$	$A_{17} = 8960$
$A_3 = 28$	$A_8 = 833$	$A_{13} = 3888$	$A_{18} = 10693$
$A_4 = 81$	$A_9 = 1216$	$A_{14} = 4901$	$A_{19} = 12636$
$A_5 = 176$	$A_{10} = 1701$	$A_{15} = 6076$	$A_{20} = 14801$

Um nun die Werthe der Unbekannten zu finden, muss man die Reihe von Gleichungen auflösen, deren erste

$$\left(K + \frac{1}{3}\right) t_1 - \frac{5}{6} t_2 = 0$$

ist, während sich die anderen aus (1) ableiten, wenn man n successive die Werthe 2, 3, 4... gibt.

Setzt man der Einfachheit halber $t_{n-1} - t_n = \alpha_n t_n$ oder $t_{n-1} = (1 + \alpha_n) t_n$, so wird die Gleichung (1)

$$-(-\alpha_n A_n + 6K - 3 + A_{n+1}) t_n + A_{n+1} t_{n+1} = 0$$

oder auch

$$A_{n+1}(t_n - t_{n+1}) = (\alpha_n A_n - 6K + 3) t_n;$$

nachdem $t_n - t_{n+1} = \alpha_{n+1} t_{n+1}$, folgt daraus

$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha_n A_n - 6K + 3) t_n}{A_{n+1} t_{n+1}}$$

oder auch

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n A_n - 6K + 3}{A_{n+1} - (\alpha_n A_n - 6K + 3)}.$$

Die Werthe der Coëfficienten α kann man leicht einen von dem anderen ableiten und erhält somit ohne Schwierigkeit jeden Druck t als Function jenes mit dem unmittelbar niedrigeren Zeiger.

6. Erster specieller Fall. — Wir nehmen beispielsweise an, dass die Blätter constanten Querschnitt haben, auch in jenem Theile, welcher über das darunter liegende Blatt hervorragt (Fig. 4). Dann hat man $K = \frac{1}{3}$ und

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n A_n + 1}{A_{n+1} - (A_n \alpha_n + 1)};$$

ferner wird die erste Gleichung zwischen den Drücken t oder jene zwischen t_1 und t_2

$$\frac{2}{3} t_1 - \frac{5}{6} t_2 = 0,$$

hieraus ergibt sich

$$t_2 = \frac{4}{5} t_1, \qquad t_1 - t_2 = \frac{t_1}{5} = \frac{t_2}{4},$$

und daher

$$\alpha_2 = \frac{1}{4} = 0{\cdot}25.$$

Mit diesem Werthe und jenen früher angegebenen für A_2 und A_3 erhält man:

$$\alpha_3 = \frac{5 \times 0{\cdot}25 + 1}{28 - (5 \times 0{\cdot}25 + 1)} = 0{\cdot}08738.$$

Setzt man die Berechnung der aufeinander folgenden Coëfficienten α fort, so erhält man folgende Reihe von Werthen:

$$\alpha_2 = 0{\cdot}25$$
$$\alpha_3 = 0{\cdot}08738$$
$$\alpha_4 = 0{\cdot}04444$$
$$\alpha_5 = 0{\cdot}02684$$
$$\alpha_6 = 0{\cdot}01792$$

Man hat somit auch die folgende Serie von Werthen für die Drücke:

$$t_1 = 1{\cdot}25\, t_2,$$
$$t_2 = 1{\cdot}08738\, t_3,$$
$$t_3 = 1{\cdot}04444\, t_4,$$
$$t_4 = 1{\cdot}02684\, t_5,$$
$$t_5 = 1{\cdot}01792\, t_6.$$

Der Bequemlichkeit halber berechnet man jeden der Drücke t in einer Function von t_1, indem man Glied für Glied der obigen Gleichungen miteinander multiplicirt, womit resultirt:

$$t_2 = 0{\cdot}80\, t_1,$$
$$t_3 = 0{\cdot}73571\, t_1,$$
$$t_4 = 0{\cdot}70439\, t_1,$$
$$t_5 = 0{\cdot}68605\, t_1,$$
$$t_6 = 0{\cdot}67397\, t_1.$$

Wir müssen jetzt untersuchen, ob die gemachte Annahme, dass jedes Blatt nur an den Enden von dem darüber liegenden gedrückt wird, bewiesen werden kann.

Wenn man das Biegungsmoment der verschiedenen Blätter im eingespannten Querschnitte aufsucht, ergeben sich die folgenden Resultate:

für das 1. $t_1 \lambda$,
„ „ 2. $(2t_2 - t_1)\lambda = 0{\cdot}60\, t_1 \lambda$,
„ „ 3. $(3t_3 - 2t_2)\lambda = 0{\cdot}60713\, t_1 \lambda$,
„ „ 4. $(4t_4 - 3t_3)\lambda = 0{\cdot}61043\, t_1 \lambda$,
„ „ 5. $(5t_5 - 4t_4)\lambda = 0{\cdot}61269\, t_1 \lambda$.

Ohne weitere Fortsetzung sieht man, dass das Biegungsmoment im eingespannten Querschnitte für das erste Blatt grösser ist als für das zweite und sich deshalb von diesem letzteren lostrennt. Von dem zweiten Blatte ausgehend, wächst das Biegungsmoment an der Einspannstelle, wonach das zweite Blatt eine geringere Krümmung als das dritte, dieses eine geringere als das vierte und so fort annehmen muss. Wenn sich aber die Blätter vor der Deformirung berühren, so ist dies nicht möglich und die erhaltenen Resultate können nur dann verwirklicht werden, wenn man die Blätter in einer geringen Entfernung von

einander anordnet, wie in Fig. 5 dargestellt ist; in der Praxis kommt jedoch diese Art der Ausführung nicht vor.

7. Zweiter specieller Fall. — Wir nehmen jetzt an, dass das erste Blatt, nämlich das kürzeste, von dreieckiger Form mit constanter Dicke ist (Fig. 6), oder constante Breite und die Dicke nach den Ordinaten einer cubischen Parabel variabel hat. Demnach muss man in der Reihe der Gleichungen, welche zur Bestimmung der Unbekannten dienen, in der ersten $K = \frac{1}{2}$ und in den folgenden $K = \frac{1}{3}$ setzen.

Die erste:

$$\left(K + \frac{1}{3}\right) t_1 - \frac{5}{6} t_2 = 0$$

gibt uns dann $t_1 = t_2$ oder $t_1 - t_2 = 0$ und $\alpha_2 = 0$.

Bedient man sich der Formel:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n A_n + 1}{A_{n+1} - (\alpha_n A_n + 1)}$$

zur Bestimmung der Werthe von α_3, α_4, α_5 etc., so erhält man:

$\alpha_2 = 0$	$\alpha_7 = 0{\cdot}00972$	$\alpha_{12} = 0{\cdot}00346$
$\alpha_3 = 0{\cdot}03704$	$\alpha_8 = 0{\cdot}00756$	$\alpha_{13} = 0{\cdot}00296$
$\alpha_4 = 0{\cdot}02580$	$\alpha_9 = 0{\cdot}00604$	$\alpha_{14} = 0{\cdot}00256$
$\alpha_5 = 0{\cdot}01788$	$\alpha_{10} = 0{\cdot}00493$	$\alpha_{15} = 0{\cdot}00223$
$\alpha_6 = 0{\cdot}01292$	$\alpha_{11} = 0{\cdot}00410$	$\alpha_{16} = 0{\cdot}00196$

und damit die folgende Reihe von Gleichungen:

$t_1 = t_2$	$t_6 = 1{\cdot}00972\ t_7$	$t_{11} = 1{\cdot}00346\ t_{12}$
$t_2 = 1{\cdot}03704\ t_3$	$t_7 = 1{\cdot}00756\ t_8$	$t_{12} = 1{\cdot}00296\ t_{13}$
$t_3 = 1{\cdot}02580\ t_4$	$t_8 = 1{\cdot}00604\ t_9$	$t_{13} = 1{\cdot}00256\ t_{14}$
$t_4 = 1{\cdot}01788\ t_5$	$t_9 = 1{\cdot}00493\ t_{10}$	$t_{14} = 1{\cdot}00223\ t_{15}$
$t_5 = 1{\cdot}01292\ t_6$	$t_{10} = 1{\cdot}00410\ t_{11}$	$t_{15} = 1{\cdot}00196\ t_{16}$

Drückt man t_2, t_3 etc. in Functionen von t_1 aus, so resultirt:

$t_2 = t_1$	$t_7 = 0{\cdot}90287\ t_1$	$t_{12} = 0{\cdot}87968\ t_1$
$t_3 = 0{\cdot}96428\ t_1$	$t_8 = 0{\cdot}89610\ t_1$	$t_{13} = 0{\cdot}87709\ t_1$
$t_4 = 0{\cdot}94003\ t_1$	$t_9 = 0{\cdot}89072\ t_1$	$t_{14} = 0{\cdot}87485\ t_1$
$t_5 = 0{\cdot}92343\ t_1$	$t_{10} = 0{\cdot}88634\ t_1$	$t_{15} = 0{\cdot}87290\ t_1$
$t_6 = 0{\cdot}91155\ t_1$	$t_{11} = 0{\cdot}88273\ t_1$	$t_{16} = 0{\cdot}87120\ t_1$

Sucht man jetzt wie im vorigen Falle die Biegungsmomente der verschiedenen Blätter im eingespannten Querschnitte, so findet man die folgenden Werthe:

für das 1. $t_1 \lambda$,
„ „ 2. $(2t_2 - t_1)\ \lambda = t_1 \lambda$,
„ „ 3. $(3t_3 - 2t_2)\ \lambda = 0{\cdot}89284\ t_1 \lambda$,
„ „ 4. $(4t_4 - 3t_3)\ \lambda = 0{\cdot}86728\ t_1 \lambda$,
„ „ 5. $(5t_5 - 4t_4)\ \lambda = 0{\cdot}85703\ t_1 \lambda$,
„ „ 6. $(6t_6 - 5t_5)\ \lambda = 0{\cdot}85275\ t_1 \lambda$,
„ „ 7. $(7t_7 - 6t_6)\ \lambda = 0{\cdot}85019\ t_1 \lambda$,
„ „ 8. $(8t_8 - 7t_7)\ \lambda = 0{\cdot}84871\ t_1 \lambda$,
„ „ 9. $(9t_9 - 8t_8)\ \lambda = 0{\cdot}84768\ t_1 \lambda$,
„ „ 10. $(10t_{10} - 9t_9)\ \lambda = 0{\cdot}84692\ t_1 \lambda$,
„ „ 11. $(11t_{11} - 10t_{10})\ \lambda = 0{\cdot}84663\ t_1 \lambda$,
„ „ 12. $(12t_{12} - 11t_{11})\ \lambda = 0{\cdot}84613\ t_1 \lambda$,
„ „ 13. $(13t_{13} - 12t_{12})\ \lambda = 0{\cdot}84601\ t_1 \lambda$,
„ „ 14. $(14t_{14} - 13t_{13})\ \lambda = 0{\cdot}84580\ t_1 \lambda$,
„ „ 15. $(15t_{15} - 14t_{14})\ \lambda = 0{\cdot}84564\ t_1 \lambda$,
„ „ 16. $(16t_{16} - 15t_{15})\ \lambda = 0{\cdot}84556\ t_1 \lambda$.

Für das erste und zweite Blatt ist der Werth des Biegungsmomentes im eingespannten Querschnitte gleich; das erste Blatt biegt sich nach einem Kreisbogen, wie wir in Nr. 6 gezeigt haben, ebenso krümmt sich das zweite Blatt nach einem Kreisbogen mit demselben Radius in dem mit dem ersten Blatte correspondirenden Theile; nachdem $t_2 = t_1$, so ist offenbar in der ganzen Strecke das Biegungsmoment constant und gleich $t_1 \lambda$.

Abstrahirt man jedoch von der Dicke der Blätter, so kann man sagen, dass sich das erste und zweite Blatt nur an den correspondirenden Punkten an den Enden des ersten Blattes pressen.

Für die folgenden Blätter sieht man, dass das Biegungsmoment im eingespannten Querschnitte fortwährend abnimmt, folglich nimmt auch die Krümmung ab und die Blätter entfernen sich, vom eingespannten Querschnitte ausgehend, wirklich von einander.

Um nun zu beweisen, dass irgend welche zwei Blätter sich ihrer ganzen Ausdehnung nach trennen und nur an den Enden berühren,

bestimmen wir ihre Biegungscurven. Betrachtet man beispielsweise das fünfte und sechste Blatt, so findet man ihre Krümmung in der Entfernung x von der Befestigungsstelle, da für das fünfte $x < 4\lambda$ und für das sechste $x < 5\lambda$, mit folgenden Formeln:

$$\frac{EI}{\varrho_5} = t_5(5\lambda - x) - t_4(4\lambda - x) = (0{\cdot}85703\,\lambda + 0{\cdot}01660\,x)\,t_1,$$

$$\frac{EI}{\varrho_6} = t_6(6\lambda - x) - t_5(5\lambda - x) = (0{\cdot}85275\,\lambda + 0{\cdot}01178\,x)\,t_1;$$

da man, wenn es sich um sehr kleine Deformationen handelt, im Allgemeinen $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $\frac{1}{\varrho}$ substituiren kann, wobei y die Ordinate der Curve nach der Deformation ist, mit Bezug auf die Tangente an den Befestigungspunkt, so kann man auch $\frac{d_2y_5}{dx^2}$ und $\frac{d^2y_6}{dx^2}$ für $\frac{1}{\varrho_5}$ und $\frac{1}{\varrho_6}$ setzen; integrirt man jede der Gleichungen zweimal und beachtet, dass die Constanten Null sind, so erhält man:

$$EI\frac{dy_5}{dx} = \left(0{\cdot}85703\,\lambda x + 0{\cdot}01660\,\frac{x^2}{2}\right)t_1,$$

$$EIy_5 = \left(0{\cdot}85703\,\frac{\lambda x^2}{2} + 0{\cdot}01660\,\frac{x^3}{6}\right)t_1,$$

$$EI\frac{dy_6}{dx} = \left(0{\cdot}85275\,\lambda x + 0{\cdot}01178\,\frac{x^2}{2}\right)t_1,$$

$$EIy_6 = \left(0{\cdot}85275\,\frac{\lambda x^2}{2} + 0{\cdot}01178\,\frac{x^3}{6}\right)t_1.$$

Vergleicht man die Werthe von y_5 und y_6, so sieht man, dass für gleiche Abscissen die beiden Glieder für letzteres immer kleiner ausfallen als jene für ersteres, folglich trennen sich die beiden Blätter thatsächlich von einander.

Will man die Ordinate y der beiden Blätter für $x = 5y$ bestimmen, so muss man diesen Werth von x in jenen für die Ordinate y_6 einsetzen, nachdem der Ausdruck für y_5 nur in den Grenzen $x = 0$ bis $x = 4\lambda$ giltig ist oder auch von der Befestigungsstelle bis zum Angriffspunkte der Kraft t_4. Die Ordinate eines Punktes des fünften Blattes

in dem Intervalle von $x = 4\lambda$ und $x = 5\lambda$ (die Werthe von EIy_5 und $EI\frac{dy_5}{dx}$ mit α und β für $x = 4\lambda$ bezeichnet) erhält man sogleich:

$$EIy_5 = \alpha + \beta(x - 4\lambda) + t_5 \frac{(x - 4\lambda)^3}{3}.$$

Wenn man in diese Formel $x = 5\lambda$ einsetzt, ergibt sich

$$EIy_5 = 10{\cdot}91\, t_1,$$

und $x = 5\lambda$ in den Ausdruck für y_6 eingesetzt, gibt gleicherweise

$$EIy_6 = 10{\cdot}91\, t_1;$$

die beiden Ordinaten y_5 und y_6 sind also für $x = 5\lambda$ gleich, womit gezeigt ist, dass sich die beiden Blätter an den Enden des fünften berühren, während selbe der ganzen Länge nach von einander getrennt sind.

Dasselbe Resultat würde man auch für irgend zwei andere Blätter erhalten, deshalb können wir auf die Richtigkeit der gemachten Annahme schliessen.

Wir müssen noch die Pfeilhöhe, welche der Biegung der Enden eines jeden Blattes entspricht, bestimmen. In Nummer 5 haben wir für die Deformationsarbeit des n^{ten} halben Blattes erhalten:

$$L_n = \frac{K\lambda^3}{2EI} t^2{}_n + \frac{1}{2EI}\int_0^{(n-1)\lambda}\left[t_n(n\lambda - x) - t_{n-1}(n\lambda - \lambda - x)\right]^2 dx,$$

worin t_n und t_{n-1} die beiden auf dasselbe wirkenden Kräfte bezeichnen.

Die Derivate dieses Ausdruckes bezüglich t_n gibt uns die Senkung des Angriffspunktes von t_n, also:

$$\eta_n = \frac{1}{EI}\left\{K\lambda^3 t_n + \int_0^{(n-1)\lambda}\left[t_n(n\lambda - x) - t_{n-1}(n\lambda - \lambda - x)\right](n\lambda - x)\, dx\right\}$$

oder auch, wenn wir uns der Formeln erinnern:

$$\int_0^{(n-1)\lambda}(n\lambda - x)^2\, dx = \frac{n^3 - 1}{3}\lambda^3,$$

$$\int_0^{(n-1)\lambda}(n\lambda - x)(n\lambda - \lambda - x)\, dx = \frac{(n-1)^2(2n+1)}{6}\lambda^3,$$

welche in Nummer 5 erhalten wurden,

$$\eta_n = \frac{\lambda^3}{EI}\left\{\left(K + \frac{n^3-1}{3}\right)t_n - \frac{(n-1)^2(2n+1)}{6}t_{n-1}\right\}.$$

Dieses ist die strenge Formel, welche man für alle Blätter anwenden kann, mit Ausnahme des ersten, für welches die Derivate der Deformationsarbeit bezüglich t_1 einfach gibt:

$$\eta_n = \frac{K\lambda^3}{EI}t_1.$$

Für die Anwendung der allgemeinen Formel auf das Hauptblatt genügt es, für n die Anzahl der Blätter und für t_n das Gewicht P einzusetzen, welches an dem Ende der Feder wirkt.

Nachdem für die in dieser Nummer studirte Form der Feder $K = \frac{1}{2}$ für das erste Blatt und $K = \frac{1}{3}$ für alle anderen zu setzen ist, wird:

$$\eta_1 = \frac{\lambda^3 t_1}{2EI},$$

$$\eta_n = \frac{\lambda^3}{EI}\left\{\frac{n^3}{3}t_n - \frac{(n-1)^2(2n+1)}{6}t_{n-1}\right\}.$$

Nachdem aus dem Vorhergehenden ein sehr geringer Unterschied zwischen den aufeinander folgenden Drücken t_{n-1} und t_n resultirt, so kann man mit grosser Annäherung t_n für t_{n-1} setzen, womit man erhält:

$$\eta_n = \frac{\lambda^3}{EI}\,\frac{3n^2-1}{6}\,t_n.$$

Für das Hauptblatt, wenn dasselbe das n^{te} ist, ergibt sich:

$$\eta_n = \frac{\lambda^3}{EI}\,\frac{3n^2-1}{6}\,P.$$

8. Dritter specieller Fall. Wir gehen jetzt zur Untersuchung des Falles über, dass nicht nur das erste Blatt an den Enden von dreieckiger Form mit constanter Dicke ist (Fig. 7) oder constante Breite und nach den Ordinaten der cubischen Parabel variable Dicke hat, sondern alle folgenden Blätter in jener Strecke, welche mit dem unteren Blatte correspondirt, constanten Querschnitt und in dem hervorragenden Theile dieselbe Form wie das erste Blatt haben.

Das Hauptblatt hat natürlich der ganzen Länge nach constanten Querschnitt.

Um in diesem Falle die Formel anwenden zu können, welche α_{n+1} in Function von α_n ergibt, muss man $K = \frac{1}{2}$ setzen, womit man erhält:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n A_n}{A_{n+1} - \alpha_n A_n};$$

nun ergibt die erste Gleichung, nämlich jene zwischen t_1 und t_2, $t_1 = t_2$ und daher $\alpha_3 = 0$, wie wir im vorigen Falle gesehen haben, folglich wird auch $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 0$ etc., d. h. alle Drücke t_1, t_2, t_3 etc. sind einander und deshalb auch dem Gewichte P gleich, welches die Enden des Hauptblattes belastet.

Aus diesen Resultaten ersieht man leicht, dass sich jedes Blatt in der ganzen Ausdehnung nach einem Kreisbogen mit dem Radius $\frac{t_1 \lambda}{EI}$ biegt, welcher für alle Blätter constant ist. Folglich trennen sich die Blätter nicht von einander, aber jedes drückt nur am Ende auf das darunter liegende, was zum Beweise der gemachten Annahme genügend ist.

Bezüglich der durch die Biegung entstehenden Pfeilhöhen hat man offenbar für das erste Blatt dasselbe Resultat wie im vorigen Falle, nämlich:

$$\eta_1 = \frac{K \lambda^3}{EI} t_1,$$

und für die folgenden kann man die Formel anwenden:

$$\eta_n = \frac{\lambda^3}{EI} \left\{ \left(K + \frac{n^3 - 1}{3} \right) t_n - \frac{(n-1)^2 (2n+1)}{6} t_{n+1} \right\}.$$

In diesen zwei Formeln muss $K = \frac{1}{2}$ gesetzt werden; nachdem $t_{n-1} = t_n$, werden dieselben:

$$\eta_1 = \frac{\lambda^3 P}{2EI}, \qquad \eta_n = n^2 \frac{\lambda^3 P}{2EI},$$

woraus folgt, dass die Pfeilhöhen der Durchbiegung an den Enden dem Quadrate der Distanz derselben Enden vom eingespannten Querschnitte proportional sind.

Wir haben früher bemerkt, dass für die Federn von der betrachteten Form das Biegungsmoment für das n^{te} Blatt $t_1 (n\lambda - x)$ ist zwischen $x = (n - 1)\lambda$ und $x = n\lambda$, oder im dreieckigen Theile: für alle Querschnitte des rechteckigen Theiles ist das Biegungsmoment $t_1 \lambda$.

Nennt man I das Trägheitsmoment der letzteren Querschnitte, so wissen wir, dass das Trägheitsmoment der Querschnitte im dreieckigen Theile variabel ist und ausgedrückt wird durch die Formel $I_x = I \frac{n\lambda - x}{\lambda}$; bezeichnet man daher mit h die Dicke der Blätter, so wird die specifische Maximal-Beanspruchung für die Querschnitte im dreieckigen Theile ebenso gross wie jene im rechteckigen Theile, wenn dort c die Dicke der Blätter ist, nämlich:

$$R = \frac{t_1 \lambda c}{2I} = \frac{P \lambda c}{2I},$$

folglich ist die Feder von gleichem Widerstande.

Wenn man P als Function von R ausdrückt und in den Ausdruck für die Pfeilhöhe η_n einsetzt, so erhält man

$$\eta_n = \frac{n^2 \lambda^2 R}{Ec}.$$

Wenn wir uns erinnern, dass mit l die Hervorragung des Hauptblattes von einer Seite des Bügels und mit m die Anzahl der Blätter bezeichnet wurde, so hat man:

$$\lambda = \frac{l}{m}$$

und

$$\eta_n = \frac{n^2}{m^2} \frac{l^2 R}{Ec},$$

worin man für n die Werthe 1, 2, 3... m einsetzen kann.

Macht man $n = m$, so erhält man die totale Durchbiegung der Feder oder auch die Pfeilhöhe für die Durchbiegung des Hauptblattes, welche sein wird:

$$\eta = \frac{l^2 R}{Ec}.$$

9. Das Hauptblatt ist aus mehreren Blättern zusammengesetzt. — Wir gehen jetzt auf die Untersuchung des häufig vorkommenden

Falles über, dass wir zwei Hauptblätter statt eines haben (Fig. 8). Diese Anordnung wird deshalb getroffen, weil der Bruch des Hauptblattes, an welchem die Belastung direct angreift, viel gefährlicher ist als der Bruch eines Zwischenblattes.

Die beiden Hauptblätter sind vollkommen gleich, liegen über einander und biegen sich zusammen so wie ein einziges Blatt, dessen Trägheitsmoment gleich der Summe der Momente der beiden Blätter ist.

Behält man die bisherigen Bezeichnungen bei und betrachtet die beiden Hauptblätter als ein einziges, das m^{te}, dessen Trägheitsmoment $2I$ sei, so kann man für die Deformationsarbeit der einzelnen Blätter dieselben Formeln anwenden, welche in Nummer 5 gefunden wurden, dagegen hat man für das doppelte Hauptblatt:

$$L_m = \frac{1}{2}\frac{K\lambda^3}{2EI}P^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2EI}\int_0^{(m-1)\lambda}\Big[P(m\lambda - x) - t_{m-1}(m\lambda - \lambda - x)\Big]^2 dx.$$

Wir können daher auch zur Bestimmung von t_1, t_2, t_3 etc. die schon gefundenen Gleichungen gebrauchen, für die letzte Gleichung zwischen t_{m-2}, t_{m-1} und P erhalten wir dagegen:

$$t_{m-2}\int_0^{(m-2)\lambda}(m\lambda - 2\lambda - x)(m\lambda - \lambda - x)\,dx + \\ + \frac{1}{2}P\int_0^{(m-1)\lambda}(m\lambda - x)(m\lambda - \lambda - x)\,dx - \\ - t_{m-1}\Big[K\lambda^3 + \int_0^{(m-2)\lambda}(m\lambda - \lambda - x)^2\,dx + \\ + \frac{1}{2}\int_0^{(m-1)\lambda}(m\lambda - \lambda - x)^2\,dx\Big] = 0$$

und nach Ausführung der Integration:

$$t_{m-2}\frac{(m-2)^2(2m-1)}{6} - t_{m-1}\Big[K + \frac{3(m-1)^3 - 2}{6}\Big] + \\ + P\frac{(m-1)^2(2m+1)}{12} = 0.$$

Wenn jedes Blatt das darunter liegende nur an den Enden drückt, so kann man offenbar t_{m-1} als ein an den Enden des $m - 1^{\text{ten}}$ Blattes

wirkendes Gewicht betrachten und wird deshalb alle Werthe von t_1, t_2, t_3,... t_{m-2} mittelst der in den früheren Nummern gegebenen Formeln in Functionen von t_{m-1} erhalten.

In jedem der zwei behandelten Fälle haben wir gesehen, dass die beiden Drücke an den Enden von zwei aufeinander folgenden Blättern strenge genommen gleich oder nur sehr wenig verschieden sind, besonders wenn die Zahl der Blätter eine etwas grosse ist. Wir können deshalb in der letzten gefundenen Gleichung $t_{m-2} = t_{m-1}$ setzen, was uns gibt:

$$t_{m-1}\left(K + \frac{m^3 - 3m - 1}{6}\right) = P\frac{(m-1)^2(2m+1)}{12}.$$

Wenn beispielsweise die Blätter an den Enden von dreieckiger Form sind und gleiche Dicke haben oder constante Breite und die Dicke nach den Ordinaten einer cubischen Parabel variabel haben, so ist $K = \frac{1}{2}$ und

$$t_{m-1} = P\frac{2m+1}{2m+4}.$$

In diesem Falle ist das Biegungsmoment im eingespannten Querschnitte für das Hauptblatt:

$$Pm\lambda - t_{m-1}(m-1)\lambda = P\lambda\frac{5m+1}{2m+4},$$

dagegen ist das Biegungsmoment im eingespannten Querschnitte für das $(m-1)^{te}$ Blatt:

$$t_{m-1}(m-1)\lambda - t_{m-2}(m-2)\lambda = t_{m-1}\lambda = P\lambda\frac{2m+1}{2m+4}.$$

Folglich wird die Krümmung im eingespannten Querschnitte für das Hauptblatt

$$\frac{P\lambda}{2EI}\,\frac{5m+1}{2m+4}$$

sein und für das darunter liegende Blatt:

$$\frac{P\lambda}{EI}\,\frac{2m+1}{2m+4} = \frac{P\lambda}{2EI}\,\frac{4m+2}{2m+4};$$

diese letztere ist immer kleiner als die erstere, weil m immer grösser als 1 ist; daraus folgt, dass sich das doppelte Hauptblatt von dem darunter liegenden nicht der ganzen Ausdehnung nach loslöst, sondern dasselbe auf einer unbekannten Länge, vom eingespannten Querschnitte aus, drückt. Nachdem somit die gemachte Annahme nicht eintrifft, haben auch die für oben erhaltenen Resultate keinen Werth.

Im Anfange dieser Nummer haben wir gesagt, dass es vortheilhaft ist, das Hauptblatt stärker als die darunter liegenden zu machen, und dass dieses auch der Grund ist, weshalb man selbe doppelt erzeugt. Nachdem aber aus vorstehender Rechnung resultirt, dass durch das Zusammensetzen des Hauptblattes aus zwei Blättern von derselben Dicke wie die übrigen die Annahme nicht zutrifft, auf welche sich die ganze Rechnung basirt, so werden wir hier ein sehr einfaches Mittel angeben, um das Hauptblatt stärker zu machen, derart, dass die Feder dieselbe Biegsamkeit behält, als ob jenes einfach wäre, und dass auch die Annahme erfüllt wird, auf welche sich die ganze Rechnung stützt.

Dieses Mittel besteht darin, dass man das Hauptblatt doppelt oder dreifach macht, wie man will, aber den Blättern, welche dasselbe zusammensetzen, eine solche Dicke gibt, dass die Summe ihrer Trägheitsmomente gleich dem Trägheitsmomente eines darunter liegenden Blattes wird. Auf diese Weise bleibt die Biegsamkeit des Hauptblattes vollkommen dieselbe, als ob dasselbe einfach wäre, dagegen vermehrt sich die Widerstandsfähigkeit.

Es sei c die Dicke eines jeden Blattes und a die Breite, so wird das Trägheitsmoment des Querschnittes $\frac{1}{12} ac^3$ sein und das Widerstandsmoment $\frac{1}{6} ac^2$. Wenn sich das Hauptblatt aus zwei Blättern von der Dicke c' zusammensetzt, so ist die Summe ihrer Trägheitsmomente $\frac{1}{6} ac'^3$; damit nun dasselbe gleich jenem des einfachen Blattes von der Dicke c wird, muss nothwendigerweise

$$\frac{1}{6} ac'^3 = \frac{1}{12} ac^3, \text{ woraus sich ergibt } c' = \frac{c}{\sqrt[3]{2}}.$$

Mit dieser Dicke wird das Widerstandsmoment von jedem der dünnen Blätter

$$\frac{1}{6} a c'^2 = \frac{\sqrt[3]{2}}{12} a c^2$$

sein und das Widerstandsmoment der beiden Blätter zusammen oder des Hauptblattes wird

$$\frac{1}{6} a c^2 \sqrt[3]{2} = 1 \cdot 26 \frac{a c^2}{6}.$$

Nachdem $\frac{a c^2}{6}$ das Widerstandsmoment ist, welches das Hauptblatt haben würde, wenn es einfach wäre und die Dicke c hätte, so sieht man, dass die Zusammensetzung aus zwei dünnen Blättern, jedes von der Dicke $\frac{c}{\sqrt[3]{2}}$ das Widerstandsmoment um 26% oder über $\frac{1}{4}$ vermehrt.

Die totale Dicke des Hauptblattes resultirt mit

$$\frac{2c}{\sqrt[3]{2}} = c \sqrt[3]{4} = 1 \cdot 5874\, c,$$

so dass jedes der dünnen Blätter $0 \cdot 7937\, c$ oder für die Praxis genügend genau $\frac{4}{5} c$ dick ist.

Man kann das Widerstandsmoment des Hauptblattes noch weiter vergrössern, ohne die Biegsamkeit zu verringern, wenn man dasselbe aus drei dünnen Blättern zusammensetzt, derart, dass die Summe ihrer Trägheitsmomente gleich jenem des einfachen Blattes von der Dicke c wird. In diesem Falle hat man

$$3 \times \frac{1}{12} a c'^3 = \frac{1}{12} a c^3 \text{ und } c' = \frac{c}{\sqrt[3]{3}} = 0 \cdot 6934\, c$$

und das Widerstandsmoment des Hauptblattes resultirt mit:

$$3 \times \frac{1}{6} a c'^2 = \frac{1}{6} a c^2 \sqrt[3]{3} = 1 \cdot 4422 \frac{a c^2}{6},$$

womit die Vergrösserung des Widerstandes im Verhältnisse zum einfachen Blatte von der Dicke c mehr als 44% beträgt.

Die totale Dicke der drei dünnen Blätter, welche das Hauptblatt bilden, wird $3 \times 0{\cdot}6934\, c = 2{\cdot}0802\, c$ oder wenig grösser als $2c$; setzt man also das Hauptblatt statt aus zwei Blättern, welche dieselbe Dicke wie die darunter liegenden haben, aus drei Blättern zusammen, welche mit einander nahezu dieselbe Dicke haben wie jene zwei, so wird man eine bemerkenswerthe Vergrösserung des Widerstandes des Hauptblattes erzielen und dieselbe Biegsamkeit bewahren, als ob jenes nur aus einem Blatte von derselben Dicke wie die darunter liegenden gebildet wäre.

Aus obigen Resultaten können wir ersehen, dass man die Berechnung zusammengesetzter Blattfedern in der Praxis immer so durchführen muss, als ob das Hauptblatt einfach und von derselben Dicke wie die übrigen Blätter wäre; hierauf bleibt es unbenommen, das Hauptblatt aus zwei dünnen Blättern, jedes von der Dicke $\frac{4}{5}\, c$, oder aus drei noch dünneren Blättern von der Dicke $0{\cdot}6934\, c$ zusammenzusetzen, wodurch sich die Widerstandsfähigkeit des Hauptblattes um 25% oder 44% vermehrt und die Biegsamkeit dieselbe bleibt wie bei dem einfachen Blatte von der Dicke c.

III. Capitel.

Ebene Spiralfedern.

10. Beschreibung und Benennungen. — Wir betrachten ein dünnes Blatt aus Stahl, welches, wie in Fig. 10 dargestellt, nach einer archimedischen Spirale gewunden ist.

Ein Element der Feder sei in A befestigt und das andere Ende in B an einen cylindrischen Kern gelöthet, dessen Mittel mit jenem der Spirale zusammenfällt.

Wir werden die Curve auf zwei ortogonale Achsen mit dem Ursprunge in A beziehen, von denen die Abscissenachse durch das Centrum des Kernes geht, und setzen voraus, dass dieser von zwei Kräften Q

und Q_1, die erste gegen den Mittelpunkt, die andere senkrecht auf die x-Achse gerichtet, und einem Momente M_0 beansprucht wird, dessen Achse auf die Ebene der Spirale senkrecht steht.

Wir nennen p den Abstand der Windungen der Spirale von einander, r_1 und r_0 die Vectoren CA und CB an den Enden der Feder, r den Radius vector eines beliebigen Punktes D und φ den Winkel, welchen derselbe mit der x-Achse einschliesst.

Die Polargleichung der Spirale ist

$$r = r_0 + \frac{p}{2\pi}(\varphi - \varphi_0),$$

daraus das Bogenelement

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = \frac{d\varphi}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 r^2 + p^2}.$$

Wenn der Abstand der Windungen von einander mit Bezug auf r sehr klein ist, wie es in der Praxis bei den Spiralfedern gewöhnlich der Fall ist, so kann man mit grosser Annäherung p^2 im Verhältnisse zu $4\pi^2 r^2$ vernachlässigen und erhält

$$ds = r\,d\varphi.$$

Der Sinus des Winkels, welchen die Tangente mit dem Radius vector bildet, ist durch das Verhältniss $\frac{r\,d\varphi}{ds}$ ausgedrückt; für den oben betrachteten Fall, in welchem man $ds = r\,d\varphi$ setzen kann, wird der Sinus gleich der Einheit, und somit kann man die Tangente als auf dem Radius vector senkrecht stehend annehmen.

II. Hauptformeln. Nennen wir jetzt M, P und S, das Biegungsmoment, den normalen Druck und die Abscheerspannung im Querschnitte D, dessen Coordinaten x und y sind, so erhalten wir mit Berücksichtigung der obigen Vereinfachungen

$$M = M_0 + Qy + Q_1(x - AC) = M_0 + (Q\sin\varphi + Q_1\cos\varphi)\,r,$$
$$P = Q\sin\varphi + Q_1\cos\varphi,$$
$$S = Q\cos\varphi - Q_1\sin\varphi.$$

Die Deformationsarbeit der ganzen Spirale ist durch die Formel gegeben:

$$L = \frac{1}{2EI}\int_0^l M^2 ds + \frac{1}{2E\Omega}\int_0^l P^2 ds + \frac{A}{2F\Omega}\int_0^l S^2 ds,$$

worin Ω und I die Fläche und das Trägheitsmoment des Querschnittes der Feder, A ein Zahlen-Coëfficient, welcher von der Form des Querschnittes abhängt und für ein Rechteck $\frac{6}{5}$ ist, ferner E, F, den normalen und tangentialen Elasticitäts-Coëfficienten bedeuten.

Gewöhnlich ist die Spirale von rechteckigem Querschnitte, aus Stahl, welchen man als isotropen Körper betrachten kann, folglich $F = \frac{2}{5} E$; nennt man b und c die Breite und Dicke der Feder, so hat man

$$\Omega = b\,c, \qquad I = \frac{1}{12} b\,c^3, \qquad A = \frac{6}{5}.$$

Der Ausdruck für die Deformationsarbeit wird dann

$$L = \frac{1}{2EI}\left(\int_0^l M^2 ds + \frac{c^2}{12}\int_0^l P^2 ds + \frac{c^2}{4}\int_0^l S^2 ds\right).$$

Nachdem die Dicke der Feder im Verhältnisse zum Radius vector in der Praxis im Allgemeinen sehr klein ist, ersieht man leicht, dass die beiden Ausdrücke, welche $\int P^2 ds$ und $\int S^2 ds$ enthalten, im Verhältnisse zu $\int M^2 ds$ vernachlässigt werden können. Sind die beiden Kräfte Q und Q_1 gleich Null und wirkt an der Feder nur das Moment M_0, so sind besagte Ausdrücke Null und man erhält vollkommen genau

$$L = \frac{1}{2EI}\int_0^l M^2 ds.$$

Wird dagegen das Moment M_0 gleich Null, so resultirt aus den Ausdrücken für M und P, $M = Pr$ und

$$\int_0^l M^2 ds + \frac{c^2}{12}\int_0^l P^2 ds = \int_0^l \left(r^2 + \frac{c^2}{12}\right) P^2 ds,$$

nachdem der Annahme gemäss die Dicke c allen Werthen von r gegenüber sehr klein ist, kann man mit grosser Annäherung $\frac{c^2}{12}$ im Verhältnisse

zu r^2 vernachlässigen, was gleichbedeutend ist mit der Vernachlässigung von $\frac{c^2}{12}\int_0^l P^2\,ds$ im Verhältnisse zu $\int_0^l M^2\,ds$. Nachdem ferner der Ausdruck $\frac{c^2}{4}\int_0^l S^2\,ds$ von derselben Ordnung wie $\frac{c^2}{12}\int_0^l P^2\,ds$ ist, so kann man auch jenen vernachlässigen.

Wird weder das Moment M_0 noch die Kräfte Q und Q_1 Null, so hat man $M = \mathrm{M}_0 + Pr$ und

$$\int_0^l M^2 ds = M^2{}_0 \int_0^l ds + 2M_0 \int_0^l P r\, ds + \int_0^l P^2 r^2\, ds.$$

Vergleicht man das letzte Glied dieser Entwicklung mit den Gliedern $\frac{c^2}{12}\int_0^l P^2 ds$ und $\frac{c^2}{4}\int_0^l S^2\,ds$, so resultirt, dass man diese letzteren vernachlässigen kann.

Wir können folglich für alle Fälle annehmen:

$$L = \frac{1}{2EI}\int_0^l M^2\,ds.$$

Die Derivaten dieses Ausdruckes bezüglich M_0, Q, Q_1 ergeben den Drehungswinkel θ des Kernes und die zu den Achsen parallelen Verschiebungen ξ und η des Mittelpunktes desselben.

Wir haben also:

$$\theta = \frac{1}{EI}\int_0^l M\,ds,$$

$$\xi = \frac{1}{EI}\int_0^l M r \sin\varphi\; ds,$$

$$\eta = \frac{1}{EI}\int_0^l M r \cos\varphi\; ds,$$

oder, wenn man M in Function von M_0, Q und Q_1 ausdrückt:

$$\theta = \frac{1}{EI}\left(M_0\int_0^l ds + Q\int_0^l r\,\sin\varphi\, ds + Q_1\int_0^l r\cos\varphi\, ds\right),$$

$$\xi = \frac{1}{EI}\left(M_0\int_0^l r\sin\varphi\, ds + Q\int_0^l r^2\sin^2\varphi ds + Q_1\int_0^l r^2\sin\varphi\cos\varphi\, ds\right),$$

$$\eta = \frac{1}{EI}\left(M_0\int_0^l r\cos\varphi\, ds + Q\int_0^l r^2\sin\varphi\cos\varphi\, ds + Q_1\int_0^l r^2\cos^2\varphi\, ds\right).$$

$\int_0^l ds$ ist die Länge l der Spirale; substituirt man für ds $r\,d\varphi$ und nennt r_1 und r_0 die beiden äussersten Radien, so haben wir:

$$l = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r\,d\varphi = \frac{2\pi}{p}\int_{r_0}^{r_1} r\,dr = \frac{\pi\,(r_1^2 - r_0^2)}{p}.$$

Wenn die Spirale n Windungen hat, so ist $\frac{r_1 - r_0}{p} = n$ und

$$l = \pi\,(r_1 + r_0)\,n.$$

Substituirt man auch in den übrigen Integralen $r\,d\varphi$ für ds und führt hierauf die Integration durch, so erhält man, wenn mit C eine willkürliche Constante bezeichnet wird:

$$\int r^2 \sin\varphi\; d\varphi = -\left(r^2 - \frac{p}{2\pi^2}\right)\cos\varphi + \frac{pr}{\pi}\sin\varphi + C,$$

$$\int r^2 \cos\varphi\; d\varphi = \left(r^2 - \frac{p}{2\pi^2}\right)\sin\varphi + \frac{pr}{\pi}\cos\varphi + C,$$

$$\int r^3 \sin^2\varphi\; d\varphi = \frac{\pi r^4}{4p} - \left(\frac{r^3}{4} - \frac{3p^2 r}{32\pi^2}\right)\sin 2\varphi +$$

$$+ \left(\frac{3pr^2}{16\pi} - \frac{3p^3}{128\pi^3}\right)\cos 2\varphi + C,$$

$$\int r^3 \cos^2\varphi\; d\varphi = \frac{\pi r^4}{4p} + \left(\frac{r^3}{4} - \frac{3p^2 r}{32\pi^2}\right)\sin 2\varphi -$$

$$- \left(\frac{3pr^2}{16\pi} - \frac{3p^3}{128\pi^3}\right)\cos 2\varphi + C,$$

$$\int r^3 \sin\varphi\cos\varphi\; d\varphi = -\left(\frac{r^3}{4} - \frac{3p^2 r}{32\pi^2}\right)\cos 2\varphi +$$

$$+ \left(\frac{3pr^2}{16\pi} - \frac{3p^3}{128\pi^3}\right)\sin 2\varphi + C.$$

Alle diese Integrale müssen zwischen den Grenzen von φ oder φ_0 und $2n\pi + (\pi - \varphi_0)$ genommen werden, vorausgesetzt, dass die Spirale zwischen E und A n Windungen enthält, mehr dem Stücke EB, welches dem Winkel $\pi - \varphi_0$ entspricht.

Der Einfachheit halber werden wir das kleine Stück EB der Spirale vernachlässigen, d. h. wir werden es als vollkommen starr betrachten und die Integration von E bis A oder von π bis $(2n+1)\pi$ ausdehnen. Diese Annahmen kann man mit grosser Annäherung machen, weil wir viele Windungen bei der Spirale und den Radius des Zapfens im Verhältnisse zu r_1 sehr klein voraussetzten.

Bei dieser Annahme haben wir also:

$$H = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 \sin\varphi \, d\varphi = r_1^2 - r_0^2 = \frac{l\,p}{\pi},$$

$$H_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 \cos\varphi \, d\varphi = -\frac{p\,(r_1 - r_0)}{\pi} = -\frac{p^2\,n}{\pi},$$

$$K = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^3 \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{l}{4}\left(r_1^2 + r_0^2 + \frac{3\,p^2}{4\,\pi^2}\right),$$

$$K_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^3 \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{\pi\,(r_1^4 - r_0^4)}{4\,p} + \frac{3\,p^2\,(r_1^2 - r_0^2)}{16\,\pi} =$$

$$= \frac{l}{4}\left(r_1^2 + r_0^2 - \frac{3\,p^2}{4\,\pi^2}\right),$$

$$J = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^3 \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = -\frac{r_1^3 - r_0^3}{4} + \frac{3\,p^2\,(r_1 - r_0)}{32\,\pi^2} =$$

$$= -\frac{r_1 - r_0}{4}\left(r_1^2 + r_1\,r_0 + r_0^2 - \frac{3\,p^2}{42\,\pi^2}\right).$$

Die Ausdrücke für θ, ξ und η können auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\theta = \frac{1}{EI}\,(M_0\,l + Q\,H + Q_1\,H_1),$$

$$\xi = \frac{1}{EI}\,(M_0\,H + Q\,K + Q_1\,J),$$

$$\eta = \frac{1}{EI}\,(M_0\,H_1 + Q\,J + Q_1\,K_1).$$

12. Discussion der erhaltenen Formeln. — Gewöhnlich ist in der Praxis der Kern der Spirale ein Zapfen, welcher sich ohne Verschiebung

nur drehen kann; in diesem Falle sind die Verschiebungen ξ und η gleich Null, und man hat die beiden Gleichungen:

$$M_0 H + Q K + Q_1 J = 0,$$
$$M_0 H_1 + Q J + Q_1 K_1 = 0,$$

welche zur Bestimmung der Drücke Q und Q_1 dienen, die vom Zapfen auf die Lager ausgeübt werden.

Man erhält somit:

$$Q = \frac{-HK_1 + H_1 J}{KK_1 - J^2} M_0, \qquad Q_1 = \frac{-KH_1 + JH}{KK_1 - J^2} M_0;$$

es ist leicht zu erkennen, dass H_1 bezüglich H und J bezüglich K und K_1 sehr klein sind, daher können wir J^2 im Verhältnisse zu KK_1 und $H_1 J$ im Verhältnisse zu HK_1 vernachlässigen. Wir erhalten dann:

$$Q = -\frac{H}{K} M_0, \qquad Q_1 = \left(-\frac{H_1}{K_1} + \frac{H}{K}\frac{J}{K_1}\right) M_0,$$

woraus auch resultirt, dass Q_1 im Verhältnisse zu Q sehr klein ist und dass der Zapfen sich gegen den Punkt A zu verschieben sucht, was man voraussehen konnte.

Um nun den Werth für die Drehung θ zu bestimmen, müssen wir für Q und Q_1 die gefundenen Werthe einsetzen; nachdem der Ausdruck:

$$\theta = \frac{1}{EI}(M_0 l + Q H + Q_1 H_1)$$

in den Klammern die beiden Glieder $Q H$ und $Q_1 H_1$ enthält, von denen das zweite das Product zweier Factoren ist, welche beide im Verhältnisse zu den Factoren des ersten Gliedes sehr klein sind, so erhält man durch weitere Vernachlässigung:

$$\theta = \frac{1}{EI}(M_0 l + Q H) = \frac{M_0}{EI}\left(l - \frac{H^2}{K}\right).$$

Man kann noch beifügen, dass $K > \frac{l r_1^2}{4}$ und $\frac{H^2}{K} < \frac{4H^2}{l r_1^2}$ oder $\frac{H^2}{K} < \frac{4 l p^2}{\pi^2 r_1^2}$; nachdem das Verhältniss $\frac{4p^2}{\pi^2 r_1^2} = \left(\frac{2p}{\pi r_1}\right)^2$ sehr klein ist,

kann man $\frac{H^2}{K}$ im Verhältnisse zu l vernachlässigen, und man nimmt einfach:

$$\theta = \frac{M_0 l}{EI}.$$

13. Anwendung der erhaltenen Formeln für grosse Deformationen. — Es ist bekannt, dass die Formeln für die Elasticität im Allgemeinen nur für geringe Deformationen Giltigkeit haben, weil sich bei jenen die Hebelarme und Richtungen der Kräfte bezüglich der Querschnitte der Körper immer auf die Form derselben vor der Deformirung beziehen, während sie sich strenge genommen auf die schliessliche Form beziehen sollten. Daraus folgt, dass für ein solches elastisches System, bei welchem auch nicht geringe Deformationen die Wirkung der angreifenden Kräfte wenig ändern, die gewöhnlichen Formeln der Elasticität zur Berechnung nicht sehr geringer Deformationen angewendet werden können.

Dieser Fall tritt bei den Spiralfedern ein; thatsächlich ist die Drehung, bei Vernachlässigung von sehr geringen Grössen, gegeben durch die Formel:

$$\theta = \frac{M_0 l}{EI},$$

welche nur von der Länge der Feder und nicht von der Form oder Anzahl der Windungen abhängig ist und auch für eine irgendwie grosse Drehung gilt, nachdem die Länge l immer dieselbe bleibt. Es ist leicht einzusehen, wenn man die durchgeführte Berechnung übersieht, dass dieselbe Formel auch dann besteht, wenn die Feder nicht nach einer archimedischen Spirale gewunden ist, wenn die Spirale nur die Vectoren nach einem Winkel schneidet, welcher wenig von 90° verschieden ist.

Auch die Ausdrücke für Q und Q_1 ändern sich wenig bei einer grösseren oder geringeren Drehung der Spirale, wie man aus einer Untersuchung der Werthe von H, H_1, K, K_1 und J erkennt; daher können auch diese Ausdrücke im Falle einer beliebig grossen Drehung zur Anwendung kommen.

14. Art der Anwendung der Spiralfedern. — Gewöhnlich verwendet man die Spiralfedern bei Uhren oder anderen Präcisions-Apparaten (Uhrwerken) an, um Bewegungen hervorzubringen. Die Anwendung erfolgt nach zwei verschiedenen Methoden.

Die Welle, an welcher das innere Ende der Feder befestigt ist, und die einige Male gedreht wurde, um den Mechanismus aufzuziehen, bewegt sich um die eigene Achse und dreht dabei ein befestigtes Zahnrad, welches die Bewegung auf ein Getriebe überträgt; in diesem Falle bleibt das andere Ende der Feder fix und das Zahnrad übt auf das Getriebe einen Druck aus, welcher durch das Verhältniss $\frac{M_0}{R}$ bestimmt ist, wobei M_0 das der augenblicklichen Biegung der Feder entsprechende Biegungsmoment und R das Perpendikel vom Mittelpunkte des Rades auf die Richtung des Druckes ist, welcher zwischen den Zähnen des Rades und des Getriebes auftritt. In diesem Falle bringt die Welle des Zahnrades einen Zapfendruck $\frac{M_0}{R}$ hervor, dessen Richtung parallel zu jenem Drucke ist, der zwischen besagten Zähnen herrscht. Dieser Druck kommt noch zu Q und Q_1 dazu. Natürlich ist das Zahnrad auf der Welle derart befestigt, dass es sich nicht drehen kann, während die Feder gespannt wird, sondern nur dann, wenn sich letztere langsam abwindet.

Häufig ist die Feder mit dem inneren Ende an der Welle befestigt, welche zum Aufziehen dient, und das andere Ende am inneren Rande einer mit der Welle concentrischen Trommel befestigt, die Aussen gezahnt und mit einem Getriebe im Eingriffe steht. In diesem Falle wird die Feder aufgezogen, indem man die Welle, an welcher das innere Ende der Feder befestigt ist, dreht, während welcher Operation die Trommel fix bleibt; hierauf bleibt die Welle fest und die sich langsam abwindende Feder bewegt die Trommel in demselben Sinne, in welchem die Welle gedreht wurde, und theilt dem Getriebe die Bewegung mit. Auch in diesem Falle ist der Druck zwischen den Zähnen des Rades und Getriebes $\frac{M_0}{R}$, während ein gleicher und paralleler Druck von den Zapfen der Trommel auf deren Lager ausgeübt wird.

15. Formeln für den Widerstand und die Biegsamkeit der Spiralfedern. — Aus den Formeln:

$$M = M_0 + (Q \sin \varphi + Q_1 \cos \varphi)\, r,$$
$$P = Q \sin \varphi + Q_1 \cos \varphi,$$
$$S = Q \cos \varphi - Q_1 \sin \varphi,$$

welche das Biegungsmoment, den Normaldruck und die Beanspruchung auf Abscheerung in irgend einem Querschnitte ergeben, sieht man, dass diese drei Werthe von einem Querschnitte zum andern variiren und von den Reactionen Q und Q_1 abhängig sind. Es ist unschwer einzusehen, dass man mit grosser Annäherung für alle Querschnitte setzen kann:

$$M = M_0, \qquad P = 0, \qquad S = 0.$$

Thatsächlich findet man den Maximalwerth der Ausdrücke $P = Q \sin \varphi + Q_1 \cos \varphi$ und $S = Q \cos \varphi - Q_1 \sin \varphi$ mit $\sqrt{Q^2 + Q_1^2}$; nachdem wir gezeigt haben, dass Q_1 im Verhältnisse zu Q sehr klein ist, so kann man Q_1^2 bezüglich Q^2 vernachlässigen und einfach $— Q$ als Maximalwerth für den Normaldruck P und die Abscheerkraft S annehmen. Ferner ist der Maximalwerth des Productes $(Q \sin \varphi + Q_1 \cos \varphi)\, r$, welcher im Ausdrucke für das Moment M erscheint, jedenfalls kleiner als das Product, welches man aus den Maximalwerthen der Factoren $Q \sin \varphi + Q_1 \cos \varphi$ und r erhält, somit kleiner als $— Q r_1$; nachdem $Q = — \frac{H}{K} M_0$, folgt daraus:

$$— Q r_1 = \frac{H r_1}{K} M_0,$$

und weil $K > \frac{l}{4} r_1^2$, $H = \frac{l p}{\pi}$, so folgt daraus, dass $— Q r_1$ kleiner ist als

$$\frac{4 p}{\pi r_1} M_0.$$

Wenn der Abstand der Windungen der Spirale, wie es gewöhnlich der Fall ist, im Verhältnisse zum Radius r_1 sehr klein wird, so ist auch das Verhältniss $\frac{4 p}{\pi r_1}$ ein sehr kleines und deshalb der Ausdruck

$$(Q \sin \varphi + Q_1 \cos \varphi)\, r$$

immer ein kleiner Bruchtheil von M_0. Wir können denselben also vernachlässigen und für alle Querschnitte $M = M_0$ nehmen.

Das Maximum der specifischen, normalen Beanspruchung eines Querschnittes, in welchem der maximale Normaldruck herrscht, wird

$$R = \frac{6 M_0}{b c^2} — \frac{Q}{b c},$$

oder für Q den Werth eingesetzt:

$$R = \frac{6 M_0}{b c^2}\left(1 + \frac{c H}{6 K}\right);$$

nachdem die Dicke c der Feder im Verhältnisse zum Radius r_1 sehr gering ist, resultirt aus Obigem, dass das Verhältniss $\frac{c H}{6 K}$ kleiner als $\frac{4 p c}{\pi r_1^2}$ ist und daher im Verhältnisse zur Einheit vernachlässigt werden kann, indem man einfach annimmt:

$$R = \frac{6 M_0}{b c^2}.$$

Die tangentiale Maximal-Beanspruchung R' tritt in der Mitte jener Querschnitte auf, in denen S einen Maximalwerth erreicht; folglich hat man

$$R' = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{bc}.$$

Wir haben soeben gezeigt, dass der Werth $\frac{Q}{bc}$ im Verhältnisse zu $\frac{6 M_0}{b c^2}$ sehr klein ist; dasselbe gilt auch für $\frac{3}{2}\,\frac{Q}{bc}$, woraus folgt, dass R' im Verhältnisse zu R sehr klein ist und gleich Null angenommen werden kann.

Combinirt man jetzt die beiden Formeln:

$$\theta = \frac{M_0 l}{E I} = \frac{12 M_0 l}{E b c^3} \text{ und } R = \frac{6 M_0}{b c^2},$$

so ergibt sich

$$\theta = \frac{2 R l}{E c}.$$

Wir wollen nun ein Zahlenbeispiel durchführen; es sei

$$R = 60{,}000.000, \qquad E = 20.000{,}000.000, \qquad c = 0{\cdot}0005\ m,$$

$$b = 0{\cdot}006\ m, \quad r_0 = 0{\cdot}005\ m, \quad r_1 = 0{\cdot}015\ m, \quad p = \frac{r_1 - r_0}{10} = 0{\cdot}001\ m.$$

Vorerst finden wir

$$l = \frac{\pi (r_1^2 - r_0^2)}{p} = 0{\cdot}627\ m$$

und daraus

$$\theta = 6 \cdot 897,$$

um daher die Feder zu spannen, muss man mit der cylindrischen Welle

$$\frac{6 \cdot 897}{2\pi} = \frac{6 \cdot 897}{6 \cdot 28} = 1 \cdot 098$$

oder ungefähr $1\frac{1}{10}$ Umdrehungen machen.

Man findet ferner

$$M_0 = \frac{b c^2 R}{6} = 0 \cdot 015,$$

und vorausgesetzt, dass das Zahnrad, mittelst welchem die Trommel die Bewegung auf das Uhrwerk überträgt, einen Radius von 0·017 *m* hat, den Druck zwischen den Zähnen des Rades und Getriebes mit

$$\frac{0 \cdot 015}{0 \cdot 017} = 0 \cdot 882 \; kg.$$

Natürlich tritt dieser Druck nur dann auf, wenn sich die Feder abzuwickeln beginnt, und wird nach und nach immer geringer, bis er sich bei vollkommen abgewickelter Feder auf Null reducirt.

IV. Capitel.

Prismatische Feder, auf Biegung und Torsion beansprucht.

16. Beschreibung und Bezeichnungen. — Wir betrachten einen prismatischen Körper (Fig. 11), welcher an einem Ende A eingespannt, am anderen Ende B von folgenden Kräften beansprucht wird:

Eine Kraft P_x wirkt im Mittelpunkte der Basis B und ist nach der Achse des Körpers im Sinne von B gegen A gerichtet;

zwei Kräfte S_y und S_x greifen im Mittelpunkte derselben Basis B an, liegen in der Ebene der letzteren und sind nach ihren Haupt-Trägheitsachsen gerichtet; die eine nehmen wir für einen Beobachter, welcher von A gegen B sieht, von links nach rechts gerichtet an, die

andere von oben nach unten; die Coordinaten y und z sind positiv nach denselben Richtungen wie obige Kräfte.

Drei Biegungsmomente M_x, M_y, M_z, um die x-, y-, z-Achse. streben um die zugehörige Achse eine Drehung im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers hervorzubringen, wobei der Beobachter in einem Punkte der Achse auf der Seite der positiven Ordinaten gegen den Ursprung sehend gedacht ist, und die Körperachse AB als x-Achse, dann der Punkt A als Ursprung angenommen wurde.

Dieses vorausgesetzt, bezeichnen wir mit l die Länge des Prisma und betrachten in der Entfernung x von der Einspannstelle einen Querschnitt, an welchem folgende Kräfte wirken:

ein gleichförmiger, normaler Druck $\frac{P_x}{\Omega}$;

ein anderer normaler Druck, welcher nach einem linearen Gesetze variabel ist, durch das Biegungsmoment $M_y + S_z\,(l - x)$ hervorgerufen und durch die Formel ausgedrückt wird:

$$\frac{M_y + S_z\,(l - x)}{I_y}\,z;$$

ferner ein nach einem linearen Gesetze variabler Druck, welcher von dem Biegungsmomente $M_z - S_y\,(l - x)$ hervorgerufen und durch die Formel ausgedrückt wird:

$$-\frac{M_z - S_y\,(l - x)}{I_z}\,y;$$

ein tangentialer Druck p_{xy}, parallel zur y-Achse, welcher sich aus drei Theilen zusammensetzt, und zwar einer p'_{xy} in Folge des Torsionsmomentes M_x und zwei andere p''_{xy}, p'''_{xy} in Folge der Abscheerkräfte S_y und S_z;

ein tangentialer Druck p_{zx}, parallel zur z-Achse, welchen man auch aus drei Theilen zusammensetzen kann, einer p'_{zx} in Folge des Torsionsmomentes M_x und die anderen zwei p''_{zx} und p'''_{zx} in Folge der Abscheerkräfte S_y und S_z.

Alle diese tangentialen Drücke sind Functionen von y und z und nach der Form des Querschnittes verschieden.

Im Querschnitte in der Entfernung x von der Einspannstelle und im Punkte mit den Coordinaten y, z haben wir folgende drei Componenten der elastischen Inanspruchnahme:

$$p_{xx} = \frac{P_x}{\Omega} + \frac{M_y + S_z(l-x)}{I_y} z - \frac{M_z - S_y(l-x)}{I_z} y;$$

$$p_{xy} = p'_{xy} + p''_{xy} + p'''_{xy},$$

$$p_{zx} = p'_{zx} + p''_{zx} + p'''_{zx}.$$

17. Ausdruck für die Deformationsarbeit. — Bekanntlich ist die Deformationsarbeit der unendlich kleinen Schichte zwischen den Querschnitten mit den Abscissen x und $x + dx$ durch die Formel ausgedrückt:

$$\frac{dx}{2E}\int\int p^2_{xx}\, dy\, dz + \frac{dx}{2F}\int\int (p^2_{xy} + p_{zx}{}^2)\, dy\, dz;$$

wobei man die doppelte Integration auf den ganzen Querschnitt ausdehnen muss.

Das erste Integrale $\int\int p_{xx}{}^2\, dy\, dz$ kann man immer in bestimmter Form ausdrücken, wie auch immer die Form des Querschnittes sei; wenn man beachtet, dass

$$\int\int y\, dy\, dz = 0, \qquad \int\int z\, dy\, dz = 0, \qquad \int\int yz\, dy\, dz = 0,$$

$$\int\int z^2\, dy\, dz = I_y, \qquad \int\int y^2\, dy\, dz = I_z,$$

so wird dasselbe:

$$\frac{P^2_x}{\Omega} + \frac{[M_y + S_z(l-x)]^2}{I_y} + \frac{[M_z - S_y(l-x)]^2}{I_z}.$$

Das zweite Integrale $\int\int (p^2_{xy} + p_{zx}{}^2)\, dy\, dz$ dagegen kann man nicht in bestimmten Ausdrücken erhalten, wenn man nicht separat die Form des Querschnittes in Betracht zieht. Wir werden nur die zwei in der Praxis für die Feder angenommenen Querschnittsformen betrachten, nämlich den rechteckigen und elliptischen; in letzterem ist auch der kreisförmige Querschnitt inbegriffen.

Diese beiden Querschnittsformen sind in Bezug auf ihre Haupt-Trägheitsachsen symmetrisch, folglich hat man immer

$$\int\int \varphi\,(y, z)\,dy\,dz = 0,$$

wenn nur die Function φ derartig beschaffen ist, dass sich das Zeichen, aber nicht der Werth ändert, wenn man von einer Coordinate das Zeichen, aber nicht den Werth ändert; nimmt man an, es sei y eine solche Ordinate, so sind offenbar alle Elemente des Integrales, welche den auf der Seite der z-Achse liegenden Elementen von der Fläche $dy\,dz$ entsprechen, gleich und von entgegengesetztem Zeichen mit den Elementen des Integrales, welche den auf der anderen Seite der Achse liegenden symmetrischen Elementen $dy\,dz$ entsprechen. Folglich heben sich die Elemente des Integrales gegenseitig auf und das Integral ist gleich Null.

Nach den von Herrn Barré de Saint-Venant erhaltenen Formeln bezüglich der Torsion und Biegung von Prismen[1]) resultirt, dass sowohl für den rechteckigen als elliptischen Querschnitt die Componenten p'_{zy}, p'_{zx} der elastischen Inanspruchnahme in Folge der Torsion oben angeführte Eigenschaft für die Function $\varphi\,(y, z)$ besitzen, aber nur für eine der beiden Variabeln; die Componenten p''_{xy} und p''_{zx} der tangentialen elastischen Beanspruchung in Folge der Abscheerkraft S_y sind derart, dass die erste weder das Zeichen noch den Werth wechselt, und die zweite das Zeichen nur dann ändert, wenn das Zeichen von einer der beiden Variabeln sich ändert; schliesslich sind die Componenten p'''_{xy}, p'''_{zx} der tangentialen elastischen Beanspruchung in Folge der Abscheerkraft S_z derartig, dass die erste das Zeichen, aber nicht den Werth, und die zweite weder das Zeichen noch den Werth wechselt, wenn eine der Variabeln das Zeichen ändert.

Dieses festgestellt, hat man:

$$p_{xy}^2 = (p'_{xy} + p''_{xy} + p'''_{xy})^2 = p'^2_{xy} + p''^2_{xy} + p'''^2_{xy} + 2p''_{xy}\,p'''_{xy} + 2\,p'''_{xy}\,p'_{xy} + 2\,p'_{xy}\,p''_{xy}$$

$$p_{zx}^2 = (p'_{zx} + p''_{zx} + p'''_{zx})^2 = p'^2_{zx} + p''^2_{zx} + p'''^2_{zx} + 2p''_{zx}\,p'''_{zx} + 2\,p'''_{zx}\,p'_{zx} + 2\,p'_{zx}\,p''_{zx};$$

[1]) Siehe „Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme“, von A. Castigliano, pag. 93, 101, 114 und 120.

aus Obigem resultirt, dass alle die doppelten Producte, welche in den zweiten Gliedern dieser Formeln enthalten sind, Functionen von y und z sind, und nur das Zeichen, aber nicht den Werth ändern, wenn eine Variable nur das Zeichen ändert; hieraus folgt, dass bei Multiplication jener doppelten Producte mit $dy\,dz$ und Integration für den ganzen Querschnitt der Werth der Integrale Null ist.

Wir haben also einfach:

$$\int\int (p_{xy}^2 + p_{zx}^2)\,dy\,dz = \int\int (p'_{xy}^2 + p'_{xz}^2)\,dy\,dz +$$

$$+ \int\int (p''_{xy}^2 + p''_{zx}^2)\,dy\,dz + \int\int (p'''_{xy}^2 + p'''_{zx}^2)\,dy\,dz,$$

d. h. die Deformationsarbeit in Folge des Torsionsmomentes M_x und der Abscheerkräfte S_y und S_x, welche gleichzeitig auftreten, ist gleich der Summe der Deformationsarbeiten, die man erhalten würde, wenn jenes Moment und die Abscheerkräfte einzeln wirken würden.

Die Werthe p'_{xy} und p'_{zx} sind nun Producte von der Form $\varphi\,(y, z)\,M_x$, d. h. linear in Bezug auf M_x, dagegen sind die Werthe p''_{xy} und p''_{zx} von der Form $\varphi\,(y, z)\,S_y$ und jene p'''_{xy} und p'''_{zx} von der Form $\varphi\,(y, z)\,S_z$, wobei die Function φ für jede der sechs Kräfte verschieden ist.

Wir können also setzen:

$$\int\int (p_{xy}^2 + p_{zx}^2)\,dx\,dz = B\,M_x^2 + \frac{A_1 S_y^2}{\Omega} + \frac{A\,S_z^2}{\Omega},$$

wobei B, A_1 und A von der Form und Ω von der Fläche des Querschnittes abhängig sind.

18. Werthe der Coëfficienten A, A_1 und B. — Die Werthe der Coëfficienten A und A_1 lassen sich für den elliptischen Querschnitt leicht bestimmen, weil für denselben die Kräfte p''_{xy}, p''_{zx}, p'''_{xy} und p'''_{zx} rationale Functionen des ersten Grades von y und z sind; durch etwas längere Rechnungen kann man dieselben auch für den rechtwinkligen Querschnitt bestimmen, für den besagte Kräfte durch eine trigonometrische Reihe ausgedrückt werden. Nachdem man aber bekanntlich[1])

[1]) Siehe Castigliano, cit. Op., pag. 160 und 171.

mit genügender Annäherung $A = A_1 = \frac{6}{5}$ für den rechteckigen Querschnitt und $A = A_1 = \frac{10}{9}$ für den elliptischen Querschnitt setzen kann, werden wir diese Werthe ohne Weiteres annehmen.

Es ist zu bemerken, dass die Glieder, welche die Coëfficienten A und A_1 enthalten, im Verhältnisse zu den anderen, welche die Deformationsarbeit ausdrücken, immer sehr klein sind, und dass selbst ein verhältnissmässig beträchtlicher Fehler der Werthe der besagten Coëfficienten nur einen sehr geringen Einfluss auf das Schlussresultat hat. Setzen wir beispielsweise voraus, dass die Glieder, welche A und A_1 enthalten, in einem speciellen Falle gleich $\frac{1}{10}$ der Summe der übrigen Glieder seien, so wird offenbar ein Fehler von $\frac{1}{10}$ in den Werthen von A und A_1 kaum $\frac{1}{100}$ der Summe aller Glieder ausmachen.

Gehen wir nun zu dem Coëfficienten B über; wenn an dem Körper nur das Torsionsmoment M_x wirkt, wäre die Deformationsarbeit eines Elementes zwischen zwei Querschnitten in der Entfernung dx:

$$\frac{dx}{2F} B M^2_x,$$

und die Derivate dieses Ausdruckes in Bezug auf M_x würde die Drehung eines der beiden Querschnitte gegen den anderen um eine zu deren Ebene senkrechte Achse ausdrücken; nennt man also Θdx diesen Drehungswinkel, so hat man:

$$\Theta\, d\, x = \frac{dx}{F} B M_x, \quad \text{oder auch} \quad \Theta = \frac{B M_x}{F}.$$

Nennt man b und c die Halbachsen für den elliptischen Querschnitt, so hat man:

$$\Theta = \frac{M_x (b^2 + c^2)}{F \pi b^3 c^3},$$

und aus den beiden Werthen von Θ erhält man:

$$B = \frac{b^2 + c^2}{\pi b^3 c^3}.$$

Für den Kreis hat man $b = c = r$ und somit

$$B = \frac{2}{\pi r^4}.$$

Für den rechteckigen Querschnitt wird der Drehungswinkel Θ durch eine trigonometrische Reihe ausgedrückt; Herr Barré de Saint-Venant, dem wir die Lösung des Problemes der Torsion von Prismen verdanken, hat die numerischen Werthe jener Reihe für verschiedene Werthe des Verhältnisses $\frac{b}{c}$ berechnet, wobei mit b die ganze grössere, mit c die ganze kleinere Seite des Querschnittes bezeichnet ist. Herr Barré de Saint-Venant hat

$$\Theta = \frac{M_x}{\beta F b c^3}$$

gesetzt, worin β einen Zahlen-Coëfficienten bedeutet. Wir haben somit für den rechteckigen Querschnitt:

$$\frac{B M_x}{F} = \frac{M_x}{\beta F b c^3}, \qquad \text{daraus} \qquad B = \frac{1}{\beta b c^3}.$$

Die Werthe des Coëfficienten β für verschiedene Werthe des Verhältnisses $\frac{b}{c}$ sind die folgenden:

$\frac{b}{c}$	β	$\frac{b}{c}$	β	$\frac{b}{c}$	β
1·00	0·14058	1·50	0·19576	3·00	0·26332
1·10	0·15398	1·60	0·20374	3·50	0·27331
1·20	0·16612	1·75	0·21428	4·00	0·28081
1·25	0·17173	1·80	0·21743	5·00	0·29135
1·30	0·17707	2·00	0·22868	10·00	0·31232
1·40	0·18690	2·50	0·24936	20·00	0·32283

19. Schlussformeln für die Deformationsarbeit. — Wenn wir jetzt in den vollständigen Ausdruck der elementaren Deformationsarbeit die Werthe der Integrale

$$\int\int p_{xx}^2 \, dy dz, \qquad \int\int (p_{xy}^2 + p_{zx}^2) \, dy \, dz$$

einführen, erhalten wir:

$$\frac{dx}{2E}\left\{\frac{P_x^2}{\Omega}+\frac{[M_y+S_z(l-x)]^2}{I_y}+\frac{[M_z-S_y(l-x)]^2}{I_z}\right\}$$
$$+\frac{dx}{2F}\left(BM_x^2+\frac{A_1S_y^2}{\Omega}+\frac{AS_z^2}{\Omega}\right).$$

Integrirt man diese Formel nach der ganzen Länge des Körpers, so erhält man den Werth für die Deformationsarbeit desselben; nimmt man hierauf die Derivate mit Bezug auf die Kräfte P_x, S_y, S_z und die Momente M_x, M_y, M_z, so wird man die Verschiebungen des Mittelpunktes vom Querschnitte B parallel zur x-, y-, z-Achse, und die Drehungen desselben Querschnittes um obige drei Achsen erhalten.

Die Durchführung dieser Rechnung macht keine Schwierigkeit; aber nachdem unser Ziel beim Aufsuchen der allgemeinen Formel für die Deformationsarbeit nur jenes war, uns für das Studium der Spiralfedern vorzubereiten, wollen wir uns hier für die gerade Feder auf den Fall beschränken, dass dieselbe nur von dem Torsionsmomente M_x beansprucht werde, d. h. wir nehmen an, dass die drei Kräfte P_x, S_y, S_z und die beiden Momente M_y, M_z gleich Null sind.

20. Gerade Feder, welche nur vom Torsionsmomente M_x beansprucht wird. — Die Deformationsarbeit des Blattes wird dann:

$$\int_0^l \frac{dx}{2F}BM_x^2=\frac{l}{2F}BM_x^2,$$

und nachdem die Derivate dieses Ausdruckes den Winkel Θ ergibt, welcher die Drehung des Endquerschnittes B bezüglich des eingespannten Querschnittes A anzeigt, so hat man:

$$\Theta=\frac{l}{F}BM_x,$$

worin für den Coëfficienten B die oben angeführten Werthe zu setzen sind.

Für den elliptischen Querschnitt hat man:

$$\Theta=\frac{l}{F}\frac{b^2+c^2}{\pi b^3c^3}M_x,$$

und für den rechteckigen Querschnitt:

$$\Theta = \frac{l}{F} \frac{M_x}{\beta b c^3},$$

worin für den numerischen Coëfficienten β der entsprechende Werth aus obiger Tabelle einzusetzen ist.

Wir müssen hier noch anführen, dass für den elliptischen Querschnitt der maximale, tangentiale Zug an den Enden der kleinen Achse wirkt und durch die Formel $\frac{2 M_x}{\pi b c^2}$ ausgedrückt wird; nennt man R_t den transversalen Widerstands-Coëfficienten, so muss für das Gleichgewicht bestehen:

$$\frac{2 M_x}{\pi b c^2} < R_t,$$

oder höchstens

$$\frac{2 M_x}{\pi b c^2} = R_t;$$

bestimmt man aus dieser Gleichung M_x und setzt den erhaltenen Werth in den Ausdruck für Θ ein, so ergibt sich:

$$\Theta = \frac{l}{F} \frac{b^2 + c^2}{2 b^2 c} R_t,$$

und für den kreisförmigen Querschnitt, wenn man $b = c = r$ setzt:

$$\Theta = \frac{l}{F} \frac{R_t}{r}.$$

Für den rechteckigen Querschnitt resultirt aus der Theorie des Herrn Barré de Saint-Venant, dass die maximale tangentiale Beanspruchung in den Mittelpunkten der grösseren Seiten des Querschnittes auftritt, und durch das Product des Torsionsmomentes und einer trigonometrischen Reihe ausgedrückt wird, welche nur von dem Verhältnisse $\frac{b}{c}$ der Seitenflächen des Querschnittes abhängig ist. Der Ausdruck für die maximale tangentiale Beanspruchung des rechteckigen Querschnittes ist durch die Formel ausgedrückt:

$$\frac{M_x}{\alpha b c^2},$$

worin b die grössere und c die kleinere Seite des Querschnittes bedeutet; die Werthe von α für verschiedene Werthe des Verhältnisses $\frac{b}{c}$ sind in der folgenden Tabelle gegeben:

$\frac{b}{c}$	α	$\frac{b}{c}$	α	$\frac{b}{c}$	α
1·00	0·20817	1·50	0·23097	3·00	0·26720
1·10	0·21393	1·60	0·23433	3·50	0·27514
1·20	0·21920	1·75	0·23896	4·00	0·28166
1·25	0·22121	1·80	0·24042	5·00	0·29150
1·30	0·22315	2·00	0·24588	10·00	0·31232
1·40	0·22733	2·50	0·25759	20·00	0·32283

Soll die maximale tangentiale Beanspruchung gleich dem Widerstands-Coëfficienten sein, so haben wir

$$\frac{M_x}{\alpha b c^2} = R_t,$$

aus dieser Gleichung und aus

$$\Theta = \frac{l}{F} \frac{M_x}{\beta b c^3},$$

M_x eliminirt, ergibt

$$\Theta = \frac{\alpha}{\beta} \frac{l R_t}{c F}.$$

Nachdem für den quadratischen Querschnitt $\alpha = 0{\cdot}20817$ und $\beta = 0{\cdot}14058$, so erhält man

$$\Theta = 1{\cdot}481 \frac{l R_t}{c F}.$$

Den transversalen Widerstands-Coëfficienten R_t nimmt man gewöhnlich mit $\frac{4}{5}$ des normalen Widerstands-Coëfficienten an, und den tangentialen Elasticitäts-Coëfficienten F mit $\frac{2}{5} E$, wobei der Stahl als isotroper Körper betrachtet ist.

Als Beispiel suchen wir bei einer Stange aus Stahl, von kreisförmigem Querschnitte, mit einem Durchmesser von 0·01 m und einer Länge von 1·00 m den Werth des Torsionsmomentes M_x und den

Drehungswinkel Θ, wobei wir voraussetzen, dass die maximale tangentiale Beanspruchung 32 *kg* per mm^2 oder 32,000.000 *kg* per m^2 betragen soll.

Nimmt man $E = 20.000,000.000$ per m^2 und

$$F = \frac{2}{5} E = 8.000,000.000,$$

so ergibt die Formel:

$$\frac{2 M_x}{\pi r^3} = R_t,$$

$$M_x = \frac{32,000.000 \times \pi \times 0{\cdot}005^3}{2} = 6{\cdot}28;$$

nachdem das Moment M_x das Product aus einem Kräftepaare und dem Hebelsarme von 0·30 *m* ist, hat jede Kraft des Paares den Werth:

$$P = \frac{6{\cdot}28}{0{\cdot}30} = 20{\cdot}93 \; kg.$$

Die Formel:

$$\Theta = \frac{l R_t}{F r},$$

gibt uns dann

$$\Theta = \frac{1{\cdot}00 \, m \times 32,000.000}{8.000,000.000 \times 0{\cdot}005} = 0{\cdot}90,$$

womit der Torsionswinkel in Graden ausgedrückt

$$\frac{0{\cdot}90}{\pi} 180^0 = 51^0 \, 32' \, 44'' \quad \text{wird.}$$

Betrachten wir noch den Fall eines Stahlblattes, welches 0·040 *m* breit, 0·002 *m* dick und 1 *m* lang ist; der transversale Querschnitt hat eine Fläche von 0·80 cm^2 und unterscheidet sich wenig von jenem der cylindrischen Stange des vorigen Beispieles von 0·7854 cm^2 Fläche.

Das Verhältniss zwischen der grösseren und kleineren Seite des rechteckigen Querschnittes ist $\frac{0{\cdot}040}{0{\cdot}002} = 20$, somit

$$\alpha = \beta = 0{\cdot}32283, \qquad \frac{\alpha}{\beta} = 1.$$

Die Formel:

$$\frac{M_x}{\alpha b c^2} = R_t$$

ergibt

$$M_x = 0{\cdot}32283 \times 0{\cdot}040 \times 0{\cdot}002^2 \times 32,000.000 = 1{\cdot}653;$$

nimmt man auch hier an, dass das Torsionsmoment M_x aus dem Producte eines Kräftepaares und dem Hebelarme von 0·30 *m* zusammengesetzt ist, so haben die Kräfte den Werth:

$$P = \frac{1 \cdot 653}{0 \cdot 30} = 5 \cdot 51 \; kg.$$

Der Drehungswinkel bestimmt sich aus der Formel

$$\Theta = \frac{\alpha}{\beta} \frac{l \, R_t}{cF},$$

mit $$\frac{1 \cdot 00 \times 32{,}000.000}{0 \cdot 002 \times 8.000{,}000.000} = 2 \cdot 00.$$

und ist in Graden ausgedrückt:

$$\frac{2 \cdot 00}{\pi} \times 180^0 = 114^0 \, 32' \, 44''.$$

Man ersieht hieraus, dass das rechteckige Blatt eine viel geringere Last als die cylindrische Stange trägt, aber sich um einen grösseren Winkel dreht. Das halbe Product des Torsionsmomentes und des Drehungswinkels oder die Deformationsarbeit ist

für den kreisförmigen Querschnitt $\frac{1}{2} 6 \cdot 28 \times 0 \cdot 90 = 2 \cdot 826,$

und für den rechteckigen $\frac{1}{2} 1 \cdot 653 \times 2 \cdot 00 = 1 \cdot 653,$

weshalb sich der kreisförmige Querschnitt besser für die Feder eignet, besonders dort, wo Stösse auftreten.

In diesen beiden Fällen ist der Drehungswinkel sehr gross und würde bei zunehmender Länge der Stange proportional wachsen; wenn nun am Ende nicht allein das Torsionsmoment M_x, sondern auch noch die Momente M_y, M_z oder die Transversalkräfte S_y, S_z wirken, könnten die gegebenen Formeln nur für einen sehr kleinen Drehungswinkel angewendet werden; wenn die Stange nur vom Torsionsmomente M_x und dem Drucke P_x beansprucht wird, ist die Formel für den Winkel Θ brauchbar, wie auch immer der Werth dieses Winkels ausfällt, weil das Moment M_x und der Druck P_x, welche am Endquerschnitte angreifen, dieselbe Wirkung auf die Zwischenquerschnitte haben, gleichgiltig wie gross die Torsion oder der Drehungswinkel des Endquerschnittes bezüglich des Zwischenquerschnittes ausfällt.

V. Capitel.

Cylindrische Schraubenfeder.

21. Beschreibung. — Wir betrachten nun eine Feder (Fig. 14), deren Achse nach einer Schraubenlinie $ABCH$ gekrümmt ist, und nehmen an, dass an den beiden Enden der Schraube zwei Arme AA', HH' befestigt sind, welche senkrecht zur Achse des Cylinders stehen, auf dem die Schraubenlinie liegt, und in den Punkten A', H' endigen.

Wir setzen voraus, dass der eine Arm AA_1 festgehalten sei, und am anderen folgende Kräfte wirken:

1. Drei Kräfte, Q, T, T_1, greifen im Punkte H' an, von denen die erste nach der Achse des Cylinders von H' nach A', die zweite nach der Verlängerung des Armes HH' gerichtet ist, und die dritte auf diesen Arm und auf der Achse $A'H'$ des Cylinders senkrecht steht.

2. Ein Moment M_0, welches die Cylinderachse $A'H'$ als Achse hat und die Feder zu drehen strebt.

Ferner machen wir die Annahme, dass der Querschnitt der Feder, senkrecht zur Achse der Schraube, elliptisch oder rechtwinklig sei, mit einer Haupt-Trägheitsachse als Tangente an die Cylinderfläche und andere in der Richtung eines Perpendikels vom Mittelpunkte des Querschnittes auf die Achse $A'H'$ des Cylinders.

22. Zerlegung der Kräfte, welche an der Feder wirken. — Wir betrachten einen Querschnitt, dessen Mittelpunkt K (Fig. 14) auf einer Meridianebene des Cylinders liegt, welche mit der durch den Punkt H gehenden Meridianebene den Winkel φ einschliesst, und nehmen als x-Achse die Senkrechte auf den Querschnitt oder die Tangente der Schraube im Punkte K, als y-Achse die auf der Cylinderachse senkrecht stehende Haupt-Trägheitsachse, und als z-Achse die andere Haupt-Trägheitsachse, welche die Cylinderfläche tangirt.

Wenn wir α den spitzen Winkel nennen, welchen die Schraube mit den Erzeugenden der Cylinderfläche einschliesst, so ist klar, dass

1. Die Kraft Q mit der x-, y- und z-Achse, im Querschnitte K die Winkel α, 90^0 und $90^0 - \alpha$ einschliesst, und daher die Componenten

$$Q \cos \alpha, \quad 0 \quad \text{und} \quad Q \sin \alpha$$

ergibt, welche nach den drei Achsen gerichtet sind; ferner wird das Moment $-Qr$ hervorgerufen, dessen Achse die Gerade OX'[1]) ist, welche zur Meridianebene des Punktes K senkrecht steht, und deshalb mit der x-, y- und z-Achse die Winkel $-(90^0-\alpha)$, 90^0 und $180^0-\alpha$ einschliesst, wonach die Kraft Q die Momente

$$-Qr\cos(90-\alpha) = -Qr\sin\alpha, \qquad 0 \qquad \text{und} \qquad Qr\cos\alpha$$

ergibt.

2. Die Kraft T schliesst mit der y-Achse den Winkel φ ein, mit der x-Achse einen Winkel, dessen *cos* gleich ist *sin* φ *sin* α und mit der z-Achse einen Winkel, dessen *cos* gleich ist $-$ *sin* φ cos α; daher sind die Componenten der Kraft T

$$T\sin\varphi\sin\alpha, \qquad T\cos\varphi, \qquad -T\sin\varphi\cos\alpha;$$

ferner erzeugt die Kraft T ein Moment Tr *sin* φ, dessen Achse parallel zur Cylinderachse und somit mit den drei Achsen die Winkel α, 90^0 und $90^0-\alpha$ einschliesst, woraus sich die Componenten oder die Drehungsmomente, welche von T hervorgebracht werden, mit

$$Tr\sin\varphi\cos\alpha, \qquad 0 \qquad \text{und} \qquad Tr\sin\varphi\sin\alpha$$

ergeben.

3. Die Kraft T_1 schliesst mit der Hilfsachse OX' den Winkel $-\varphi$ und mit der Achse OY den Winkel $90+\varphi$ ein, daher sind die Componenten mit Bezug auf diese beiden Achsen T_1 *cos* φ und T_1 *cos* $(90+\varphi) = -T_1$ *sin* φ; die erstere kann man noch in zwei nach den Achsen OX, OZ gerichteten Componenten zerlegen, und erhält somit für T_1 die nach den drei Achsen gerichteten Componenten

$$T_1\cos\varphi\sin\alpha \qquad -T_1\sin\varphi \qquad -T_1\cos\varphi\cos\alpha.$$

---

[1]) Wir nehmen das Moment in Folge der Kraft Q negativ, weil für einen in X' aufgestellten Beobachter, welcher gegen den Ursprung O sieht, das Moment eine Drehung hervorzubringen sucht, welche jener der Bewegung der Uhrzeiger entgegengesetzt ist. Um die Fig. 14 nicht undeutlich zu machen, haben wir in Fig. 15 die Coordinatenachsen so dargestellt, dass der Ursprung O mit dem Mittelpunkte K des Querschnittes zusammenfällt, die Achse OX die Tangente an die Schraube, OY das Perpendikel auf die Cylinderachse und OZ das Perpendikel auf OX in der Tangentialebene an die Cylinderfläche ist. In Fig. 15 sind die Erzeugenden der Cylinderfläche vertical angeordnet.

Die Kraft T_1 erzeugt auch das Moment $T_1 r \cos \varphi_1$, dessen Achse parallel zur Cylinderachse ist und in folgende drei Componenten nach den Achsen zerlegt werden kann:

$$T_1 r \cos \varphi \cos \alpha, \quad 0 \quad \text{und} \quad T_1 r \cos \varphi \sin \alpha.$$

4. Schliesslich ergibt das Moment M, welches als Achse die Cylinderachse hat und die Feder im Sinne der Uhrzeiger zu drehen strebt, wobei der Beobachter in Z' steht und gegen O sieht, nach den drei Achsen die Momente

$$M \cos \alpha, \quad 0 \quad \text{und} \quad M \sin \alpha.$$

Nachdem so für jede Inanspruchnahme die Componenten nach den drei Achsen und die Momente um dieselben bestimmt wurden, kann man durch einfaches Summiren den Normaldruck P_x, die Abscheerkräfte S_y, S_z bezüglich des Querschnittes K und auch das Torsionsmoment M_x und die Biegungsmomente M_y, M_z erhalten.

Somit resultirt:

$$\begin{aligned}
P_x &= Q \cos \alpha + T' \sin \varphi \sin \alpha + T_1 \cos \varphi \sin \alpha, \\
S_y &= T \cos \varphi - T_1 \sin \varphi, \\
S_z &= Q \sin \alpha - T' \sin \varphi \cos \alpha - T_1 \cos \varphi \cos \alpha, \\
M_x &= -Q r \sin \alpha + T r \sin \varphi \cos \alpha + T_1 r \cos \varphi \cos \alpha + M \cos \alpha, \\
M_y &= 0, \\
M_z &= Q r \cos \alpha + T r \sin \varphi \sin \alpha + T_1 r \cos \varphi \sin \alpha + M \sin \alpha.
\end{aligned}$$

23. Die Deformationsarbeit der Feder. — Um nun die Deformationsarbeit des Körperelementes zwischen dem Querschnitte K, welcher dem Winkel φ entspricht, und dem unendlich nahen, dem Winkel $\varphi + d\varphi$ entsprechenden Querschnitte auszudrücken, haben wir

$$\frac{ds}{2E}\left[\frac{P_x^2}{\Omega} + \frac{M_x^2}{I_x}\right] + \frac{ds}{2F}\left[B M_x^2 + \frac{A (S_y^2 + S_z^2)}{\Omega}\right],$$

wobei mit ds das Element der Schraube oder der Achse bezeichnet ist, welches zwischen den zwei mit den Winkeln φ und $\varphi + d\varphi$ correspondirenden Querschnitten liegt.

Nachdem die Kräfte P_x, S_x, S_z und die Momente M_x und M_z in Functionen von φ ausgedrückt sind, so wird es passend sein, auch das Element ds der Schraube durch dieselbe Variable auszudrücken; wenn

wir beachten, dass die Schraube auf einer cylindrischen Oberfläche verläuft und alle Erzeugenden unter dem constanten Winkel α schneidet, dessen Tangente $\frac{2\pi r}{p}$ ist, wobei wir mit p die Steigung und mit r den Radius der Cylinderfläche bezeichnen, so wird die Projection des Elementes ds der Schraube auf einen senkrechten Querschnitt des Cylinders $r\,d\varphi$, woraus folgt:

$$ds = \frac{r\,d\varphi}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{4\pi^2 r^2 + p^2}}{2\pi}\,d\varphi.$$

Nennen wir nun Φ den totalen Verdrehungswinkel der Schraube, welcher so oftmal den ganzen Umfang 2π umfasst, als Windungen sind, so haben wir für die totale Deformationsarbeit der ganzen Feder die Formel:

$$\frac{r}{\sin\alpha}\left[\frac{1}{2E}\int_0^{\Phi}\left(\frac{P_x^2}{\Omega} + \frac{M_z^2}{I_z}\right)d\varphi + \frac{1}{2F}\int_0^{\Phi}\left(B M_x^2 + \frac{A(S_y^2 + S_z^2)}{\Omega}\right)d\varphi\right].$$

24. Deformationen der Feder und Reactionen der fixen Punkte. — Wenn man die Derivate dieses Ausdruckes bezüglich der Kräfte Q, T, T_1 nimmt, erhält man die zu diesen Kräften parallelen Verschiebungen des Punktes H', an welchem jene angreifen, und die Derivate mit Bezug auf das Moment M ergibt den Winkel Θ, welcher die Drehung des Armes HH' gegen den Arm AA' ausdrückt. Wenn man sich die Ausdrücke für P_x, S_y, S_z, M_x und M_z gegenwärtig hält, ergeben sich folgende Formeln:

$$q = \frac{r\cot\alpha}{E}\int_0^{\Phi}\left(\frac{P_x}{\Omega} + \frac{r M_x}{I_z}\right)d\varphi + \frac{r}{F}\int_0^{\Phi}\left(-rB M_x + \frac{A S_z}{\Omega}\right)d\varphi,$$

$$t = \frac{r}{E}\int_0^{\Phi}\left(\frac{P_x}{\Omega} + \frac{r M_z}{I_z}\right)\sin\varphi\,d\varphi +$$

$$+ \frac{r}{F}\int_0^{\Phi}\left(r B M_x \sin\varphi\cot\alpha + \frac{A(S_y\cos\varphi - S_z\sin\varphi\cos\alpha)}{\Omega\sin\alpha}\right)d\varphi,$$

$$t_1 = \frac{r}{E}\int_0^{\Phi}\left(\frac{P_x}{\Omega} + \frac{r M_z}{I_z}\right)\cos\varphi\,d\varphi +$$

$$+ \frac{r}{F}\int_0^{\Phi}\left(rB M_x\cos\varphi\cot\alpha - \frac{A(S_y\sin\varphi + S_z\cos\varphi\cos\alpha)}{\Omega\sin\alpha}\right)d\varphi,$$

$$\omega = \frac{r}{E}\int_0^{\Phi} \frac{M_x}{I_z}\, d\varphi + \frac{r\cot\alpha}{F}\int_0^{\Phi} B\, M_x\, d\varphi.$$

Wenn wir annehmen, dass die Feder im Ganzen n Windungen hat, wird $\Phi = 2\pi n$ und man hat demnach:

$$\int_0^{2\pi n} \sin\varphi\, d\varphi = 0, \qquad \int_0^{2\pi n} \cos\varphi\, d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi n} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi n} \sin^2\varphi\, d\varphi = n\pi, \qquad \int_0^{2\pi n} \cos^2\varphi\, d\varphi = n\pi,$$

woraus sich folgende Gleichungen für die Verschiebungen ergeben:

$$q = \frac{2n\pi r\cot\alpha}{E}\left[Q\cos\alpha\left(\frac{1}{\Omega}+\frac{r^2}{I_z}\right)+\frac{M r\sin\alpha}{I_z}\right]+$$

$$+\frac{2n\pi r}{F}\left[Q\sin\alpha\left(r^2 B+\frac{A}{\Omega}\right)-r B M\cos\alpha\right].$$

$$t = \frac{n\pi r\sin\alpha}{E}T\left(\frac{1}{\Omega}+\frac{r^2}{I_z}\right)+\frac{n\pi r}{F}T\left[r^2 B\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+\frac{A(1+\cos^2\alpha)}{\Omega\sin\alpha}\right],$$

$$t_1 = \frac{n\pi r\sin\alpha}{E}T_1\left(\frac{1}{\Omega}+\frac{r^2}{I_z}\right)+\frac{n\pi r}{F}T_1\left[r^2 B\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+\frac{A(1+\cos^2\alpha)}{\Omega\sin\alpha}\right],$$

$$\omega = \frac{2n\pi r}{E}\frac{Q r\cos\alpha + M\sin\alpha}{I_z}+\frac{2n\pi r\cot\alpha}{F}B(-Q r\sin\alpha M\cos\alpha).$$

In der Praxis ist gewöhnlich das Ende H' des Armes HH' während der Deformation auf der Achse der Schraube festgehalten, und deshalb sind die seitlichen Verschiebungen t, t_1 gleich Null. In diesem Falle dienen die beiden Gleichungen, welche man erhält, wenn man die Ausdrücke für die zwei Verschiebungen gleich Null setzt, zur Bestimmung der Reactionen T und T_1 der seitlichen Stützen des Punktes H'; nachdem diese Gleichungen $T = 0$, $T_1 = 0$ ergeben, folgt, dass für den Fall, wenn die Feder nur von der Kraft Q und dem Momente M, welches am Arme HH' wirkt, beansprucht ist, die Reactionen T und T_1 Null sind, d. h. der Punkt H' würde sich genau nach der Achse der Schraube

verschieben, auch wenn derselbe durch keine seitlichen Lager dazu gezwungen wäre.

Setzt man nun $T = 0$, $T_1 = 0$, so werden die Ausdrücke für P_x, S_y, S_z, M_x, M_y, M_z die folgenden:

$$P_x = Q \cos \alpha, \qquad S_y = 0, \qquad S_z = Q \sin \alpha,$$

$$M_x = -Q r \sin \alpha + M \cos \alpha, \quad M_y = 0, \quad M_z = Q r \cos \alpha + M \sin \alpha,$$

und die Verschiebungen t, t_1 sind Null, weshalb nur mehr die Betrachtung der Ausdrücke für q und Θ erübrigt.

25. Vereinfachung der Ausdrücke für q und Θ durch Vernachlässigung der im Verhältnisse zu den anderen sehr kleinen Glieder. — Um die erste Vereinfachung des Ausdruckes für q einzuführen, nennen wir $\varrho = \sqrt{\frac{I_z}{\Omega}}$ den Drehungsradius des Querschnittes in Bezug auf die z-Achse und beachten, dass das Binom

$$\frac{1}{\Omega} + \frac{r^2}{I_z} \qquad \text{wird} \qquad \frac{r^2}{I_z}\left(1 + \frac{\varrho^2}{r^2}\right);$$

benennt man mit b und c die Halbachsen des elliptischen Querschnittes, welche nach der y- und z-Achse gerichtet sind, so hat man:

$$\Omega = \pi b c, \qquad I_z = \frac{\pi}{4} b^3 c, \qquad \varrho^2 = \frac{b^2}{4}, \qquad \text{daraus} \qquad \frac{\varrho^2}{r^2} = \left(\frac{b}{2r}\right)^2;$$

wenn die Halbachse b des Querschnittes im Verhältnisse zum Durchmesser $2r$ der Basis der Schraube sehr klein ist, kann man das Glied $\frac{\varrho^2}{r^2}$ gegenüber der Einheit vernachlässigen; dasselbe gilt auch für das Glied $\frac{1}{\Omega}$ im Verhältnisse zu $\frac{r^2}{I_z}$. Diese Vereinfachung lässt sich in gleicher Weise für den rechteckigen Querschnitt durchführen.

Betrachten wir ferner das Binom $r^2 B + \frac{A}{\Omega}$, welches für den elliptischen Querschnitt $\frac{r^2 (b^2 + c^2)}{\pi b^3 c^3} + \frac{10}{9} \frac{1}{\pi b c}$ wird, und schreiben wir es in der Form $\frac{r^2 (b^2 + c^2)}{\pi b^2 c^2}\left(1 + \frac{10}{9} \frac{b^2 c^2}{r^2 (b^2 + c^2)}\right)$, so sieht man leicht,

dass der Werth von $\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$ immer geringer ausfällt, als die kleinere von den Strecken b und c; wenn daher $b < c$, ist das Binom $1 + \frac{10}{9}\frac{b^2 c^2}{r^2(b^2+c^2)}$ jedenfalls kleiner als $1 + \frac{10}{9}\left(\frac{b}{r}\right)^2$; nachdem nun das Verhältniss $\frac{b}{r}$ sehr klein ist, kann man das Glied $\frac{10}{9}\left(\frac{b}{r}\right)^2$ gegen die Einheit vernachlässigen, was mit einer Vernachlässigung von $\frac{A}{\Omega}$ gegen $r^2 B$ gleichwerthig ist. Dasselbe lässt sich auch für den rechtwinkligen Querschnitt durchführen, und wir können schreiben:

$$q = \frac{2 n \pi r \cot \alpha}{E}\frac{r^2}{I_z}\left(Q \cos \alpha + \frac{M \sin \alpha}{r}\right) + \\ + \frac{2 n \pi r}{F} r^2 B \left(Q \sin \alpha - \frac{M \cos \alpha}{r}\right).$$

Zur weiteren Vereinfachung beachten wir, mit p die Steigung der Schraube bezeichnet, folgende Ausdrücke:

$$\cot \alpha = \frac{p}{2 \pi r}, \quad \sin \alpha = \frac{2 \pi r}{\sqrt{4 \pi^2 r^2 + p^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{p}{\sqrt{4 \pi^2 r^2 + p^2}},$$

in denen man, bei der verhältnissmässigen Kleinheit der Steigung gegen den Umfang $2 \pi r$, mit grosser Annäherung p^2 gegenüber $4 \pi^2 r^2$ vernachlässigen kann, und nimmt einfach

$$\sin \alpha = 1, \qquad \cos \alpha = \frac{p}{2 \pi r}.$$

Für diesen der Praxis entsprechenden Fall wird

$$P_x = Q \frac{p}{2 \pi r}, \qquad S_y = 0, \qquad S_z = Q,$$

$$M_x = - Q r + M \frac{p}{2 \pi r}, \qquad M_y = 0, \qquad M_z = Q \frac{p}{2 \pi} + M;$$

und ferner

$$q = \frac{n p r}{E I_z}\left(Q \frac{p}{2 \pi} + M\right) + \frac{2 n \pi r B}{F}\left(Q r^2 - M \frac{p}{2 \pi}\right).$$

$$\Theta = \frac{2 n \pi r}{E I_z}\left(Q \frac{p}{2 \pi} + M\right) + \frac{n p}{F} B \left(- Q r + M \frac{p}{2 \pi r}\right),$$

oder auch, wenn man die Feder aus einem isotropen Materiale hergestellt voraussetzt und $F = \frac{2}{5}$ setzt:

$$q = \frac{n r}{E}\left[Q\left(\frac{p^2}{2\pi I_z} + 5\pi r^2 B\right) + M p\left(\frac{1}{I_z} - \frac{5}{2} B\right)\right],$$

$$\Theta = \frac{n}{E}\left[Q r p\left(\frac{1}{I_z} - \frac{5}{2} B\right) + M\left(\frac{2\pi r}{I_z} + \frac{5 p^2 B}{4\pi r}\right)\right].$$

Wir können aber noch andere Vereinfachungen vornehmen; für den elliptischen Querschnitt hat man

$$F = \frac{2}{5} E,$$

$$I_z = \frac{\pi}{4} b^3 c, \qquad B = \frac{b^2 + c^2}{\pi b^3 c^3},$$

und daher

$$I_z B = \frac{b^2 + c^2}{4 c^2},$$

nachdem b die kleinere und c die grössere Halbachse ist, schwankt das Product $I_z B$ zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$.

Für den rechteckigen Querschnitt ist

$$I_z = \frac{1}{12} b^3 c, \qquad B = \frac{1}{\beta b^3 c},$$

folglich

$$I_z B = \frac{1}{12\beta};$$

β liegt zwischen den Grenzen 0·14058 und 0·32283, wenn das Verhältniss $\frac{c}{b}$ zwischen 1 und 20 ist, folglich bleibt das Product $I_z B$ zwischen $\frac{1}{1{\cdot}68}$ und $\frac{1}{3{\cdot}87}$. Wenn man den rechteckigen und elliptischen Querschnitt zusammen betrachtet, sieht man, dass der grössere Werth des Productes $I_z B$ $\frac{1}{1{\cdot}68}$ ist und für den quadratischen Querschnitt gilt, während der kleinere Werth $\frac{1}{4}$ ist und für den langgestreckten, elliptischen Querschnitt gilt.

Betrachten wir nun in dem oben für q gefundenen Ausdrucke das Binom:

$$\frac{p^2}{2\pi I_z} + 5\pi r^2 B = \frac{2\pi r^2}{I_z}\left(\frac{p^2}{4\pi^2 r^2} + \frac{5}{2} B I_z\right),$$

so sieht man, dass das Verhältniss $\frac{p^2}{4\pi^2 r^2}$ gegen $\frac{5}{2} B I_z$ vernachlässigt werden kann; wenn man auch für $B I_z$ den Minimalwerth $\frac{1}{4}$ annimmt, erhält man $\frac{5}{2} B I_z = \frac{5}{8}$, während das Verhältniss $\frac{p^2}{4\pi^2 r^2}$ sehr klein ist, nachdem die Steigung p gegen den Umfang $2\pi r$ sehr klein angenommen wurde. Wir können also $5\pi^2 r^2 B$ für das Binom $\frac{p^2}{2\pi I_z} + 5\pi r^2 B$ setzen.

In dem Binom:

$$\frac{2\pi r}{I_z} + \frac{5 p^2}{4\pi r} B = \frac{2\pi r}{I_z}\left(1 + \frac{5}{2}\frac{p^2}{4\pi^2 r^2} B I_z\right),$$

welches in dem Ausdrucke für Θ enthalten ist, kann man auch das zweite Glied gegen das erste vernachlässigen, denn nimmt man für $B I_z$ den Maximalwerth $\frac{1}{1 \cdot 68}$, so wird $\frac{5}{2}\frac{p^2}{4\pi^2 r^2} B I_z$ gleich

$$\frac{5}{3 \cdot 36}\frac{p^2}{4\pi^2 r^2},$$

und kann im Verhältnisse zur Einheit vernachlässigt werden.

Wir können also q und Θ mit folgenden Formeln ausdrücken:

$$q = \frac{n r}{E I_z}\left[5\pi r^2 B I_z Q + p\left(1 - \frac{5}{2} B I_z\right) M\right],$$

$$\Theta = \frac{n r}{E I_z}\left[p\left(1 - \frac{5}{2} B I_z\right) Q + 2\pi M\right].$$

Wir gehen nun zur Anwendung dieser Formeln auf zwei in der Praxis häufig vorkommende Anordnungen über.

26. Die Schraubenfeder wird nur durch das Moment M beansprucht. — Hierbei lassen sich zwei Fälle unterscheiden, je nachdem sich der Punkt H' nach der Achse der Schraube verschieben kann, oder ob er fest ist, so dass sich die Distanz $A'H'$ nicht ändern kann.

Im ersteren Falle hat man in H' keine Reaction und kann in den Formeln deshalb $Q = 0$ setzen, womit man erhält:

$$P_x = 0, \qquad S_y = 0, \qquad S_z = 0,$$

$$M_x = \frac{p}{2\pi r} M, \qquad M_y = 0, \qquad M_z = M.$$

$$q = \frac{n r p}{E I_z}\left(1 - \frac{5}{2} B I_z\right) M,$$

$$\Theta = \frac{2 n \pi r}{E I_z} M.$$

Man sieht, dass in jedem Querschnitte von dem Torsionsmomente $M_x = \frac{p}{2\pi r} M$ hervorgebrachte tangentiale Kräfte und durch das Biegungsmoment $M_z = M$ erzeugte normale Kräfte auftreten; aber die ersteren sind im Verhältnisse zu den letzteren sehr klein, weil das Moment M_x gegen M_z sehr klein ist. Nun kann man bekanntlich nach der Theorie von Navier und Barré de Saint-Venant für einen Punkt eines Querschnittes, in welchem ein normaler Druck p_{xx} und eine tangentiale Kraft wirkt, deren Componenten p_{xy}, p_{zx} parallel zu den Haupt-Trägheitsachsen sind, annehmen, dass die Bedingungen des Gleichgewichtes dieses Punktes dieselben sind, als wenn nur ein normaler Druck wirken würde, dessen Werth gleich

$$\frac{3}{8} p_{xx} + \frac{5}{8} \sqrt{p_{xx}^2 + 4 (p_{xy}^2 + p_{zx}^2)}$$

wäre; nachdem die tangentiale Kraft, deren Resultirende $\sqrt{p_{xy}^2 + p_{zx}^2}$ ist, im Verhältnisse zu p_{xx} sehr klein wird, kann man $4 (p_{xy}^2 + p_{zx}^2)$ gegen p_{xx}^2 vernachlässigen, wonach sich die vorstehende Formel auf p_{xx} reducirt, so dass also bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen die tangentiale Kraft vernachlässigt werden kann und nur die normale zu berücksichtigen kommt; nennt man v die Maximal-Entfernung der Punkte der Contour des Querschnittes von der z-Achse, so ist

$$\frac{M v}{I_z} = R$$

der maximale Zug oder Druck pro Flächeneinheit.

Sonach wird für den elliptischen Querschnitt mit den Halbachsen b und c nach der y- und z-Achse, wie wir schon an anderer Stelle sagten:

$$I_z = \frac{\pi}{4} b^3 c, \qquad B = \frac{b^2 + c^2}{\pi b^3 c^3}, \qquad B I_z = \frac{b^2 + c^2}{4 c^2}, \qquad v = b,$$

und daher

$$q = \frac{4 n r p}{E \pi b^3 c} \left(1 - \frac{5 (b^2 + c^2)}{8 c^2}\right) M = - \frac{n r p (5 b^2 - 3 c^2)}{2 E \pi b^3 c^3} M,$$

$$\Theta = \frac{8 n r}{E b^3 c} M,$$

$$R = \frac{4}{\pi b^3 c} M;$$

ferner, wenn man M aus dem Ausdrucke für R bestimmt und den Werth in den Ausdruck für Θ einsetzt:

$$\Theta = \frac{2 \pi n r}{b} \frac{R}{E}.$$

Der Ausdruck für q zeigt uns eine merkwürdige Eigenschaft der Feder; wir haben das Moment M als positiv angenommen, wenn es die Feder zusammenzudrehen sucht, und als negativ, wenn es dieselbe aufzuwinden strebt; ferner zeigt ein positiver Werth von q eine Verkürzung und ein negativer eine Verlängerung der Achse der Schraube an.

Daraus folgt, wenn M positiv ist, d. h. eine grössere Verdrehung der Feder bewirkt, dass sich die Achse der Schraube verkürzt oder verlängert, je nachdem $5 b^2 < 3 c^2$ oder $5 b^2 > 3 c^2$ ist.

Für den kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser d, wobei $c = b = \frac{d}{2}$, tritt eine Verlängerung ein und die vorstehenden Formeln werden

$$q = - \frac{16 n r p}{E \pi d^4} M,$$

$$\Theta = \frac{128 n r}{E d^4} M,$$

$$R = \frac{32}{\pi d^3} M,$$

$$\Theta = \frac{4 \pi n r}{d} \frac{R}{E}.$$

Für den rechteckigen Querschnitt, mit den Seiten b und c parallel zur y- und z-Achse, hat man, wenn $b < c$

$$I_z = \frac{1}{12} b^3 c, \qquad B = \frac{1}{\beta b^3 c}, \qquad B I_z = \frac{1}{12 \beta}, \qquad v = \frac{b}{c},$$

und daraus

$$q = \frac{12 n r p}{E b^3 c} \left(1 - \frac{5}{24 \beta}\right) M,$$

$$\Theta = \frac{24 n \pi r}{E b^3 c} M,$$

$$R = \frac{6}{b^2 c} M,$$

$$\Theta = \frac{4 n \pi r}{b} \frac{R}{E}.$$

Der Werth für q wird positiv oder negativ, je nachdem β grösser oder kleiner als $\frac{5}{24} = 0{\cdot}20833$ ist; daraus folgt nach der Tabelle der Werthe für β, dass die Verschiebung q positiv ist, wenn $\frac{c}{b} > 1{\cdot}70$ oder $b < 0{\cdot}59\ c$, und negativ, wenn $\frac{c}{b} < 1{\cdot}70$ oder $b > 0{\cdot}59\ c$.

Für den quadratischen Querschnitt ist $\beta = 0{\cdot}14058$ und daher

$$q = -\ 5{\cdot}784 \frac{n r p}{E b^4} M,$$

$$\Theta = \frac{24 n \pi r}{E b^4} M,$$

$$R = \frac{6}{b^3} M,$$

$$\Theta = \frac{4 n \pi r}{b} \frac{R}{E}.$$

Wir gehen jetzt zur Betrachtung des Falles über, dass der Punkt H' sich nicht im Sinne der Schraubenachse verschieben kann. Hierbei wird eine Reaction Q auftreten, welche sich in Function von M ergibt, wenn man den Werth von q gleich Null setzt, nämlich:

$$Q = -\frac{p\left(1 - \frac{5}{2} B I_z\right) M}{5 \pi r^2 B I_z},$$

und diesen Werth in den Ausdruck für Θ eingesetzt, ergibt:

$$\Theta = \frac{n r}{E I_z}\left[\frac{p^2 \left(1 - \frac{5}{2} B I_z\right)^2}{5 \pi r^2 B I_z} + 2 \pi\right] M.$$

Wenn die Steigung p im Verhältnisse zum Umfange $2 \pi r$ sehr klein ist, wird das erste Glied in den Klammern des Ausdruckes für Θ gegen das zweite sehr klein und kann vernachlässigt werden, wonach

$$\Theta = \frac{2 n \pi r}{E I_z} M$$

resultirt, gerade so, als ob der Punkt H' frei wäre.

Die Reaction Q ist negativ, wenn der Werth des Binoms $1 - \frac{5}{2} B I_z$ positiv ist und umgekehrt, so dass bezüglich Q, abgesehen vom Zeichenwechsel, die reciproken Eigenschaften gelten, welche wir für q gezeigt haben, wenn Q Null ist.

Die Ausdrücke für die Kräfte P_x, S_y, S_z und die Momente M_x M_y M_z bleiben vollkommen dieselben, wie in Nummer 25, nämlich:

$$P_x = Q \frac{p}{2 \pi r}, \qquad S_y = 0, \qquad S_z = Q,$$

$$M_x = -Q r + M \frac{p}{2 \pi r}, \qquad M_y = 0, \qquad M_z = Q \frac{p}{2 \pi} + M,$$

in denen man für Q den obigen Werth einsetzen muss. Nachdem wir aber soeben gezeigt haben, dass dieser Werth sehr klein ist, so folgt daraus in erster Linie, dass man im Ausdrucke von M_z das Glied $Q \frac{p}{2 \pi}$ gegen M vernachlässigen kann, und ferner, dass die von P_x erzeugten

normalen Kräfte und die von S_z und M_x hervorgebrachten tangentialen gegenüber den vom Momente M_z erzeugten normalen Kräften vernachlässigt werden können. Somit erhält man neuerdings dieselben Resultate wie für den Fall $Q = 0$ und kann demnach den Widerstand der Feder nach folgender Formel berechnen:

$$\frac{M v}{I_z} = R.$$

27. Die Schraubenfeder ist nur von dem nach der Achse der Schraube gerichteten Druck Q beansprucht. — Auch hier lassen sich zwei Fälle unterscheiden, je nachdem sich beim Zusammendrücken der Feder der Arm HH' frei drehen kann, oder ob derselbe daran verhindert ist. Diese zwei Fälle haben denselben Zusammenhang wie die in der vorigen Nummer betrachteten; deshalb werden wir uns darauf beschränken, den ersten, in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Fall zu behandeln; wir fügen hier nur an, dass man bei Vernachlässigung der sehr kleinen Werthe auch im zweiten Falle zu denselben Resultaten gelangt, so weit die Verkürzung der Achse und der Widerstand der Feder in Betracht kommen.

Wenn nur die äussere Kraft Q angreift und die Feder sich in Folge des Druckes frei auf- oder zudrehen kann, muss man in den allgemeinen Formeln, welche Q und M enthalten, $M = 0$ setzen, woraus resultirt:

$$P_x = Q\frac{p}{2\pi r}, \qquad S_y = 0, \qquad S_z = Q,$$

$$M_x = -Q r, \qquad M_y = 0, \qquad M_z = Q\frac{p}{2\pi},$$

$$q = \frac{5 n \pi r^3 B}{E} Q,$$

$$\Theta = \frac{n r p}{E I_z}\left(1 - \frac{5}{2} B I_z\right) Q.$$

Es ist wichtig zu bemerken, dass dieser Werth von $\frac{\Theta}{Q}$ gleich dem Werthe des Verhältnisses $\frac{q}{M}$ ist, für den Fall, wenn nur das Moment M wirkt; man sieht also sogleich, dass in diesem Falle für Θ dieselben Eigenschaften wie im anderen für q gelten.

In irgend einem Querschnitte treten somit die normalen, elastischen Kräfte p_{xx} auf, welche vom Drucke P_x und dem Biegungsmomente M_z herrühren, und die elastischen, tangentialen Kräfte, welche vom Torsionsmomente M_x und der Abscheerkraft S_z erzeugt werden; der Werth von p_{xx} für einen Punkt im Abstande y von der z-Achse ist durch die Formel gegeben:

$$p_{xx} = Q\frac{p}{2\pi}\left(\frac{1}{\Omega r} + \frac{y}{I_z}\right) = Q\frac{p}{2\pi r}\left(\frac{1}{\Omega} + \frac{ry}{I_z}\right).$$

Setzen wir beispielsweise einen elliptischen Querschnitt voraus, mit der kleineren Halbachse b nach der y- und der grösseren Halbachse nach der z-Achse gerichtet, so haben wir

$$\Omega = \pi b c, \qquad I_z = \frac{\pi}{4} b^3 c,$$

und der Maximalwerth für p_{xx}, welcher für $y = b$ auftritt, wird

$$p_{xx} = Q\frac{p}{2\pi r}\frac{1}{\pi b c}\left(1 + \frac{4r}{b}\right) = \frac{2Qp}{\pi^2 b^2 c}\left(1 + \frac{b}{4r}\right).$$

Das Torsionsmoment $M_x = -Qr$ und die Abscheerkraft $S_z = Q$ erzeugen elastische, tangentiale Kräfte, deren Maximalwerth pro Flächeneinheit an den Enden der kleinen Achse auftritt, und von dem Zeichen abgesehen, folgender ist:

$$p_{xz} = \frac{2Qr}{\pi b^2 c} + \frac{4Q}{3\pi b c} = \frac{2Qr}{\pi b^2 c}\left(1 + \frac{2b}{3r}\right).$$

Dividirt man den Maximalwerth von p_{xx} durch jenen von p_{zx}, so erhält man

$$\frac{p}{\pi r}\frac{1 + \frac{b}{4r}}{1 + \frac{2b}{3r}};$$

dieser Werth ist geringer als jener von $\frac{p}{\pi r}$, woraus folgt, dass für eine im Verhältnisse zum halben Umfange πr kleine Steigung der Schraube auch der Maximalwerth von p_{xx} gegen jenen von p_{zx} sehr klein ausfällt. Deshalb ist es nicht nothwendig, die zusammengesetzte Formel des Widerstandes anzuwenden, wenn auch diese beiden Maximalwerthe im

selben Punkte auftreten, und man kann für irgend einen Querschnitt nur die Torsion wirkend annehmen, wonach die Gleichgewichtsgleichung wird

$$\frac{2\,Q\,r}{\pi\,b^2\,c} = R.$$

Für den elliptischen Querschnitt werden die Ausdrücke für q und Θ, wenn man in ersterem $\frac{5}{2}\,F$ für E und in beiden

$$I_z = \frac{\pi}{4}\,b^3\,c, \qquad B = \frac{b^2+c^2}{\pi\,b^3\,c^3}, \qquad B\,I_z = \frac{b^2+c^2}{4\,c^2}$$

setzt, die folgenden

$$q = \frac{2\,n\,r^3\,(b^2+c^2)}{F\,b^3\,c^3}\,Q,$$

$$\Theta = \frac{4\,n\,r\,p}{E\pi\,b^3\,c}\left(1 - \frac{5\,(b^2+c^2)}{8\,c^2}\right)Q = -\frac{n\,r\,p\,(5\,b^2-3\,c^2)}{2\,E\,\pi\,b^3\,c^3}\,Q,$$

und man sieht demnach, dass ein Zusammendrücken der Feder ein Zusammen- oder Aufdrehen derselben bewirkt, je nachdem

$$5\,b^2 > 3\,c^2 \qquad \text{oder} \qquad 5\,b^2 < 3\,c^2.$$

Eliminirt man Q aus dem Ausdrucke für q mittelst der Gleichgewichtsgleichung $\frac{2\,Q\,r}{\pi\,b^2\,c} = R_t$, so erhält man

$$q = \frac{n\,\pi\,r^2\,(b^2+c^2)}{F\,b\,c^2}\,R_t.$$

Für den kreisförmigen Querschnitt, mit dem Durchmesser d, also $b = c = \frac{d}{2}$ resultirt:

$$\frac{16\,Q\,r}{\pi\,d^3} = R_1,$$

$$q = \frac{64\,n\,r^3}{F\,d^4}\,Q, \quad \text{oder auch} \quad q = \frac{4\,n\,\pi\,r^2}{d}\,\frac{R_t}{F},$$

$$\Theta = -\frac{16\,n\,r\,p}{E\,\pi\,d^4}\,Q.$$

Für den rechteckigen Querschnitt kann man ebenso wie für den elliptischen beweisen, dass die Anwendung der Formel des zusammen-

gesetzten Widerstandes nicht nothwendig ist, indem man mit grosser Annäherung nur die maximale, tangentiale Kraft berücksichtigt, welche vom Torsionsmomente erzeugt wird. In Nummer 20 haben wir gesehen, dass dieses Maximum im Mittelpunkte der grösseren Seiten auftritt, und

$$\frac{M_x}{\alpha\, b^2\, c}, \qquad \text{oder} \qquad \frac{Q\, r}{\alpha\, b^2\, c}$$

ist, woraus die Gleichgewichtsgleichung

$$\frac{Q\, r}{\alpha\, b^2\, c} = R_t$$

folgt; α ist ein Zahlencoëfficient, dessen Werth aus der in Nummer 20 gegebenen Tabelle entnommen werden kann. Wir haben auch gesehen, dass für den rechteckigen Querschnitt

$$I_z = \frac{1}{12}\, b^3\, c, \qquad B = \frac{1}{\beta\, b^3\, c}, \qquad B\, I_z = \frac{1}{12\,\beta},$$

ist, worin β, als Function vom Verhältnisse $\frac{c}{b}$, einen Zahlenwert bedeutet und in der am Schlusse von Nummer 18 angeführten Tabelle gefunden werden kann.

Wir haben ferner

$$q = \frac{5\, n\, \pi\, r^3}{\beta\, b^3\, c\, E}\, Q = \frac{2\, n\, \pi\, r^3}{\beta\, b^3\, c\, F}\, Q,$$

$$\dot{\omega} = \frac{12\, n\, r\, p}{b^3\, c\, E}\left(1 - \frac{5}{24\,\beta}\right) Q.$$

Eliminirt man Q aus dem Ausdrucke für q mittelst der Gleichgewichtsgleichung

$$\frac{Q\, r}{\alpha\, b^2\, c} = R_t,$$

so erhält man:

$$q = \frac{\alpha}{\beta}\, \frac{2\, n\, \pi\, r^2}{b}\, \frac{R_t}{F}.$$

Für den quadratischen Querschnitt hat man $b = c$, $\alpha = 0{\cdot}20817$, $\beta = 0{\cdot}14058$ und somit

$$\frac{Q\, r}{0{\cdot}20817\, b^3} = R_t,$$

$$q = \frac{2\,n\,\pi\,r^3}{0{\cdot}14058\,b^4\,F}\,Q = \frac{2\,n\,\pi\,r^2}{0{\cdot}6773\,b}\,\frac{R_t}{F},$$

$$\Theta = -\,5{\cdot}784\,\frac{n\,r\,p}{b^4\,E}\,Q.$$

Anmerkung. In diesem und den folgenden Capiteln haben wir im Allgemeinen b die kleinere und c die grössere Seite der rechtwinkligen Querschnitte benannt, während im Capitel IV $b > c$ vorausgesetzt ist. Deshalb muss man sich bei der Anwendung der Werthe von α und β, welche in den Tabellen der Nummern 18 und 19 gegeben sind, vor Augen halten, dass die mit dem Verhältnisse $\frac{c}{b}$ überschriebene Rubrik die Werthe des Verhältnisses zwischen der grösseren und kleineren Seite des rechteckigen Querschnittes gibt, wie auch immer die Buchstaben sein mögen, mit denen diese Seiten bezeichnet sind.

VI. Capitel.

Konische Schraubenfeder.

28. Beschreibung und geometrische Verhältnisse. — Wir nehmen an, dass die Achse der Feder eine Schraubenlinie sei, welche auf einem geraden Kegel mit kreisförmiger Basis gezogen ist; die Curve entsteht dabei auf die Art, dass sich ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Erzeugenden der Kegelfläche bewegt, während die Erzeugende selbst mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Kegelachse rotirt. Die so definirte Curve projicirt sich als archimedische Spirale auf die Basis der Kegelfläche; jene hat constante Steigung, schneidet aber die Erzeugenden der Kegelfläche unter variablen Winkeln.

Nennt man h die auf den Erzeugenden der Kegelfläche gemessene Steigung und α den Winkel, welchen die Erzeugenden mit der Kegelachse einschliessen, so ist $h \sin \alpha$ die Steigung der archimedischen Spirale oder der horizontalen Projection der Schraubenlinie, und $h \cos \alpha$ die Steigung der Schraube auf der Kegelachse gemessen.

Die Gleichung der archimedischen Spirale oder Horizontalprojection der Schraubenlinie ist

$$r = r_1 - \frac{h \sin \alpha}{2\,\pi}\,\theta,$$

worin mit r_1 der Radius OA der Kegelbasis oder der Radius vector der Curve im Punkte A, und mit θ der Winkel bezeichnet ist, welchen der Radius $OB = r$ mit dem Radius $OA = r_1$ einschliesst, vermehrt um so viel ganze Umfänge, als Windungen zwischen den Punkten A und B liegen.

Nennt man z die Höhe des Punktes der Schraube, welcher in B auf die Kegelbasis projicirt ist, so hat man

$$z = \frac{r_1 - r}{\text{tang } \alpha} = \frac{h \cos \alpha}{2 \pi} \theta.$$

Aus diesen Formeln ergibt sich

$$dr = -\frac{h \sin \alpha}{2 \pi} d\theta, \qquad dz = \frac{h \cos \alpha}{2 \pi} d\theta,$$

wonach sich das Bogenelement der Schraube durch folgende Formel bestimmt:

$$ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2 + dz^2} = r d\theta \sqrt{1 + \frac{h^2}{4 \pi^2 r^2}}.$$

Die horizontale Projection des Elementes ds ist:

$$ds' = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2} = r d\theta \sqrt{1 + \frac{h^2 \sin^2 \alpha}{4 \pi^2 r^2}}$$

und der Winkel ψ, welchen die Normale zur archimedischen Spirale mit dem Radius vector einschliesst, ist gegeben mit

$$\text{tang } \psi = \frac{dr}{r d\theta} = -\frac{h \sin \alpha}{2 \pi r}.$$

Nennt man φ den Winkel, welchen die Tangente an die Schraubenlinie mit einer Horizontalebene oder mit der Kegelbasis einschliesst, so hat man

$$\cos \varphi = \frac{ds'}{ds} = \sqrt{\frac{4 \pi^2 r^2 + h^2 \sin^2 \alpha}{4 \pi^2 r^2 + h^2}},$$

$$\sin \varphi = \frac{dz}{ds} = \frac{h \cos \alpha}{\sqrt{4 \pi^2 r^2 + h^2}}.$$

Wenn die Steigung h im Verhältnisse zum Umfange $2 \pi r$ sehr klein ist, kann man einfach nehmen:

$$\sin\varphi = \frac{h\cos\alpha}{2\pi r}, \qquad ds = r\,d\theta = -\frac{2\pi r}{h\sin\alpha}\,dr.$$

29. Wirkungsweise der die Feder beanspruchenden Kraft. — Wir nehmen an, dass die in Betracht stehende Feder am unteren Ende fest eingespannt sei und am oberen Ende von einer verticalen Kraft P einfach gedrückt werde, ferner dass die Feder einen constanten, elliptischen oder rechteckigen Querschnitt habe, dessen eine Haupt-Trägheitsachse horizontal liegt.

Wir betrachten den Querschnitt im Punkte B' und nehmen als x-, y- und z-Achse die Tangente an die Schraube, die horizontale Haupt-Trägheitsachse und die andere Haupt-Trägheitsachse. Wenn r der Radius vector im Punkte B' oder die Entfernung dieses Punktes von der Kegelachse bezeichnet, so ist bekanntlich die Wirkung der Kraft P auf den Querschnitt in B' gleich jener einer ebenso grossen parallelen Kraft, welche in B' angreift, und einem Kräftepaare aus besagter Kraft P und einer anderen gleich grossen, entgegengesetzten Kraft in B' angreifend; dieses Kräftepaar hat eine Gerade zur Achse, welche auf einer durch den Punkt B' und die Kegelachse gehenden Verticalebene senkrecht steht, und sein Moment ist $P\,r$.

Die Verticalkraft P, welche wir nach B' verlegt haben, schliesst mit der x-Achse den Winkel $90 - \varphi$, mit der y- einen rechten und mit der z-Achse den Winkel φ ein; folglich sind die Componenten nach den drei Achsen:

$$P_x = P\cos(90-\varphi) = P\sin\varphi, \qquad S_y = 0, \qquad S_z = P\cos\varphi.$$

Das Moment $P\,r$, dessen Achse horizontal und senkrecht auf dem Radius vector r ist, kann man in erster Linie in zwei Kräftepaare zerlegen, von denen eines die y-Achse des Querschnittes und das andere die Tangente an die Horizontalprojection der Schraube oder an die archimedische Spirale zur Achse hat; das erste Moment ist $M_y = Pr\sin\psi$ und das zweite $P\,r\cos\psi$. Die Achse des letzteren ist eine horizontale Gerade, welche in der Ebene der x- und z-Achse liegt und mit diesen den Winkel $-\varphi$ und $90 + \varphi$ einschliesst, weshalb das Moment $P\,r\cos\psi$ in zwei weitere um die x- und z-Achse zerlegt werden kann, nämlich:

$$M_x = P\,r\cos\psi\cos\varphi \qquad M_z = -P\,r\cos\psi\sin\varphi.$$

Wenn man den Fall in Betracht zieht, dass die Winkel ψ und φ sehr klein sind, so dass man

$$\sin\varphi = \frac{h\cos\alpha}{2\pi r}, \quad \cos\varphi = 1, \quad \sin\psi = \frac{h\sin\alpha}{2\pi r}, \quad \cos\psi = 1$$

annehmen kann, so resultiren im Querschnitte B' für die an der Feder wirkende Kraft P die drei Kräfte:

$$P_x = P\frac{h\cos\alpha}{2\pi r}, \qquad S_y = 0, \qquad S_z = P$$

und die drei Momente:

$$M_x = P r, \qquad M_y = P h\frac{\sin\alpha}{2\pi}, \qquad M_x = -P h\frac{\cos\alpha}{2\pi}.$$

30. Deformationsarbeit der Feder. — Wir werden jetzt die Deformationsarbeit der Feder durch die in Nummer 19 gegebene Formel ausdrücken und erhalten:

$$\frac{1}{2E}\int\left[\frac{P_x^2}{\Omega} + \frac{M^2_y}{I_y} + \frac{M^2_z}{I_z}\right]ds + \frac{1}{2F}\int\left[B M_x^2 + \frac{A S_z^2}{\Omega}\right]ds^{1}),$$

oder

$$\frac{1}{2E}\frac{P^2h^2}{4\pi^2}\int\left[\frac{\cos^2\alpha}{r^2\Omega} + \frac{\sin^2\alpha}{I_y} + \frac{\cos^2\alpha}{I_z}\right]ds + \frac{1}{2F}P^2\int\left[Br^2 + \frac{A}{\Omega}\right]ds,$$

wobei die Integration auf die ganze Länge der Feder ausgedehnt werden muss.

Wenn beispielsweise der Querschnitt elliptisch ist, mit der Halbachse b nach der y- und der anderen Halbachse c nach der z-Achse gerichtet, so hat man:

$$\Omega = \pi b c, \quad I_y = \frac{\pi}{4} b c^3, \quad I_z = \frac{\pi}{4} b^3 c, \quad B = \frac{b^2 + c^2}{\pi b^3 c^3}, \quad A = \frac{10}{9},$$

das Trinom: $\dfrac{\cos^2\alpha}{r^2\Omega} + \dfrac{\sin^2\alpha}{I_y} + \dfrac{\cos^2\alpha}{I_z}$ wird

$$\frac{1}{\pi b c}\left[\frac{\cos^2\alpha}{r^2} + \frac{4\sin^2\alpha}{c^2} + \frac{4\cos^2\alpha}{b^2}\right]$$

---

[1]) Wir müssen bemerken, dass in der in Nummer 19 gegebenen Formel die Ausdrücke $M_y + S_z(l-x)$ und $M_z - S_y(l-x)$ die Biegungsmomente des Querschnittes mit der Abscisse x darstellen, Momente, welche wir jetzt für den durch die Abscisse s bestimmten Querschnitt einfach durch M_y und M_z geben.

und das Binom $B r^2 + \frac{A}{\Omega}$ verwandelt sich in

$$\frac{1}{\pi b c}\left(\frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} r^2 + \frac{10}{9}\right);$$

wenn deshalb die Halbachsen b und c im Verhältnisse zum Radius r sehr klein sind, kann man im Trinom das Glied $\frac{\cos^2 \alpha}{r^2}$ gegen die anderen zwei und im Binom $\frac{10}{9}$ gegen das andere Glied vernachlässigen. Dasselbe lässt sich auch leicht für den rechteckigen Querschnitt zeigen und die Deformationsarbeit wird in beiden Fällen:

$$\frac{1}{2E}\frac{P^2 h^2}{4\pi^2}\left(\frac{\sin^2 \alpha}{I_y} + \frac{\cos^2 \alpha}{I_z}\right)\int ds + \frac{1}{2F} P^2 B \int r^2 ds.$$

Wenn nach unserer Voraussetzung die Steigung der Schraube gegen den Umfang $2\pi r$ sehr klein ist, kann man, wie wir gezeigt haben,

$$ds = r\, d\theta = \frac{2\pi r}{h \sin \alpha} dr$$

nehmen; wir haben das negative Zeichen im zweiten Grade nicht gesetzt, weil die Integration nicht vom Maximum bis zum Minimumwerthe von r ausgedehnt wurde, wie es nothwendig wäre, sondern vom Minimum bis zum Maximum, wie man es zu machen pflegt; sind daher r_1 und r_0 der Maximum- und Minimumwerth von r, und nennt man l die entwickelte Länge der Feder, so hat man:

$$\int ds = \int_{r_0}^{r_1} \frac{2\pi r}{h \sin \alpha} dr = \frac{\pi (r_1^2 - r_0^2)}{h \sin \alpha} = l,$$

$$\int r^2 ds = \frac{2\pi}{h \sin \alpha}\int_{r_0}^{r_1} r^3 dr = \frac{\pi (r_1^4 - r_0^4)}{2 h \sin \alpha} = l \frac{r_1^2 + r_0^2}{2}.$$

Deshalb wird der Ausdruck für die Deformationsarbeit:

$$\frac{l}{2E}\frac{P^2 h^2}{4\pi^2}\left(\frac{\sin^2 \alpha}{I_y} + \frac{\cos^2 \alpha}{I_z}\right) + \frac{l}{2F} P^2 B \frac{r_1^2 + r_0^2}{2}$$

oder auch

$$\frac{1}{2E}\frac{P h (r_1^2 - r_0^2)}{4\pi \sin \alpha}\left(\frac{\sin^2 \alpha}{I_y} + \frac{\cos^2 \alpha}{I_z}\right) + \frac{1}{2F} P^2 B \frac{\pi (r_1^4 - r_0^4)}{2 h \sin \alpha}.$$

31. Deformationen der Feder und maximale Beanspruchungen pro Flächenheit. — Wenn man die Derivate dieses Ausdruckes bezüglich P nimmt, so erhält man die Verschiebung des Angriffspunktes dieser Kraft oder die Verkürzung f der Feder in der Richtung der Kegelachse:

$$f = \frac{l}{E}\frac{P h^2}{4\pi^2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{I_y} + \frac{\cos^2\alpha}{I_z}\right) + \frac{l}{F} P B \frac{r_1^2 + r_0^2}{2},$$

oder

$$f = \frac{1}{E}\frac{P h (r_1^2 - r_0^2)}{4\pi \sin\alpha}\left(\frac{\sin^2\alpha}{I_y} + \frac{\cos^2\alpha}{I_z}\right) + \frac{1}{F} P B \frac{\pi (r_1^4 - r_0^4)}{2 h \sin\alpha}.$$

Wir werden den Fall für die Feder mit elliptischem Querschnitte und jenen für die Feder mit rechteckigem Querschnitte getrennt untersuchen.

Für den ersteren Fall erhält man bei Beibehaltung der früheren Bezeichnungen:

$$f = \frac{l}{E}\frac{P h^2}{\pi^3 b c}\left(\frac{\sin^2\alpha}{c^2} + \frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right) + \frac{l}{F}\frac{P (b^2 + c^2)}{\pi b^3 c^3}\frac{r_1^2 + r_0^2}{2};$$

oder, $E = \frac{5}{2} F$ gesetzt:

$$f = \frac{P l}{F \pi b c}\left[\frac{2 h^2}{5\pi^2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{c^2} + \frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right) + \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2}\frac{r_1^2 + r_0^2}{2}\right].$$

Diese übrigens sehr einfache Formel kann für die gewöhnlichen Fälle der Praxis, wo die Steigung h im Verhältnisse zum Radius r_1 sehr klein ist, noch weiter vereinfacht werden; vergleicht man nämlich die in den Klammern stehenden Glieder miteinander, so sieht man, dass das erste im Verhältnisse zum zweiten sehr klein ist, weil der Factor

$$\frac{\sin^2\alpha}{c^2} + \frac{\cos^2\alpha}{b^2}$$

immer kleiner ist als der Factor

$$\frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2},$$

und ferner der Factor $\frac{2 h^2}{5\pi^2}$ im Verhältnisse zum Factor $\frac{r_1^2 + r_0^2}{2}$ sehr klein ist. Man kann somit das erste Glied in den Klammern vernachlässigen und erhält einfach:

$$f = \frac{P\,l\,(b^2 + c^2)\,(r_1^2 + r_0^2)}{2\,F\,\pi\,b^3\,c^3},$$

welche Formel auch rasch erhalten wird, wenn man in der Deformationsarbeit nur jenes Glied berücksichtigt, welches von der Torsion herrührt.

In irgend einem Querschnitte treten die Normaldrücke p_{xx}, von der Kraft P_x und den Momenten M_y, M_z herrührend, auf, und die tangentialen Drücke, welche von der Abscheerkraft $S_z = P$ und dem Torsionsmomente $M_x = P\,r$ hervorgerufen werden.

Nennt man, wie gewöhnlich, y und z die Coordinaten eines Punktes des Querschnittes bezüglich seiner Haupt-Trägheitsachsen, so hat man:

$$p_{xx} = \frac{P_x}{\Omega} + \frac{M_y}{I_y}\,z - \frac{M_z}{I_z}\,y$$

oder auch

$$p_{xx} = \frac{P\,h}{2\,\pi^2\,b\,c}\left(\frac{\cos\alpha}{r} + \frac{4\,\sin\alpha}{c^2}\,z + \frac{4\,\cos\alpha}{b^2}\,y\right).$$

Den Maximalwerth dieses Ausdruckes erhält man für einen Punkt der Contour des Querschnittes, oder für einen Punkt, dessen Coordinaten der Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

genügen, woraus sich durch Differenziren ergibt:

$$\frac{y\,d\,y}{b^2} + \frac{z\,d\,z}{c^2} = 1.$$

Setzt man das Differentiale von p_{xx} gleich Null, so erhält man:

$$\frac{\sin\alpha}{c^2}\,d\,z + \frac{\cos\alpha}{b^2}\,d\,y = 0;$$

eliminirt man $\frac{d\,y}{d\,z}$ aus dieser und der vorstehenden Gleichung, so resultirt:

$$\frac{y}{\cos\alpha} - \frac{z}{\sin\alpha} = 0;$$

diese Gleichung mit jener der Contour combinirt, ergibt uns die Coordinaten des Punktes, für welchen der Werth von p_{xx} ein Maximum wird, nämlich:

$$y = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\sin^2\alpha}{c^2}}}, \qquad z = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\sin^2\alpha}{c^2}}}.$$

Mit diesen Werthen wird das Maximum von p_{xx} im betrachteten Querschnitte:

$$p_{xx} = \frac{P\,h}{2\,\pi^2\,b\,c}\left(\frac{\cos\alpha}{r} + 4\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\sin^2\alpha}{c^2}}\right).$$

Wir gehen nun zu den tangentialen Beanspruchungen über.

Die Abscheerkraft $S_z = P$ erzeugt eine tangentiale Spannung p_{zx}, deren Maximalwerth auf der y-Achse auftritt und $\frac{4\,P}{3\,\pi\,b\,c}$ [1]) ist. Das Torsionsmoment $M_x = P\,r$ bringt eine tangentiale Spannung p_{zx} hervor, deren Maximalwerth an den Enden der kleinen Achse liegt und dort die Contour tangirt; nimmt man $b < c$, so hat die tangentiale Maximalspannung, welche vom Momente M_x erzeugt wird, den Werth:

$$\frac{2\,P\,r}{\pi\,b^2\,c}\ ^{2}).$$

Diese Spannung addirt sich mit jener, welche von der Abscheerkraft hervorgebracht wird, woraus der tangentiale Maximalzug im Querschnitte resultirt mit

$$p_{zx} = \frac{2\,P}{\pi\,b\,c}\left(\frac{2}{3} + \frac{r}{b}\right).$$

Man sieht, dass dieser Ausdruck mit r wächst oder für den der Kegelbasis zunächst liegenden Querschnitt ein Maximum wird; dagegen vermindert sich der Ausdruck für p_{xx} beim Wachsen von r und wird deshalb dort ein Minimum, wo p_{zx} ein Maximum ist.

Für einen gegebenen Werth von r ist das Maximum von p_{xx} offenbar kleiner als

$$\frac{P\,h}{2\,\pi^2\,b\,c}\left(\frac{1}{r} + \frac{4}{b}\right) = \frac{2\,P}{\pi\,b\,c}\ \frac{h}{\pi\,r}\left(\frac{1}{4} + \frac{r}{b}\right),$$

weil $\cos\alpha < 1$ und $\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\sin^2\alpha}{c^2}} < \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}}$ oder auch

[1]) Siehe Castigliano, cit. Op., pag. 170.
[2]) „ „ „ „ „ 101.

$\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{b^2}+\frac{\sin^2\alpha}{c^2}} < \frac{1}{b}$. Der letztere Ausdruck ist eine sehr kleine Grösse im Verhältnisse zum Maximum von p_{zx} in allen Querschnitten, wo das Verhältniss $\frac{h}{\pi r}$ ein kleiner Bruch ist, deshalb besonders an der Kegelbasis. Es ist daher nicht nöthig, dort die Formel des zusammengesetzten Widerstandes anzuwenden, sondern es genügt, für das Gleichgewicht zu setzen:

$$p_{zx} = R_t, \qquad \text{oder} \qquad \frac{2P}{\pi b c}\left(\frac{2}{3}+\frac{r}{b}\right) = R_t.$$

Das Verhältniss $\frac{r}{b}$ muss nach der Annahme eine sehr grosse Zahl sein; deshalb kann man den Bruch $\frac{2}{3}$ im Verhältnisse zu derselben vernachlässigen, wonach die Gleichgewichtsgleichung einfach

$$\frac{2Pr}{\pi b^2 c} = R_t$$

wird, wie man auch ohne Weiteres erhalten kann, wenn man nur die Wirkung der Torsion betrachtet.

Wenn man mittelst dieses Ausdruckes, nachdem r_1 für r gesetzt wurde, P aus jenem für f oben gefundenen eliminirt, erhält man:

$$f = \frac{l\,(b^2+c^2)\,(r_1^2+r_0^2)}{4\,F\,r_1\,b\,c^2}\,R_t.$$

Wenn die Feder kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d hat, resultirt:

$$f = \frac{16\,P\,l\,(r_1^2+r_0^2)}{F\,\pi\,d^4} = \frac{l\,(r_1^2+r_0^2)}{F\,r_1\,d}\,R_t,$$

$$\frac{16\,P\,r_1}{\pi\,d^3} = R_t.$$

Für den rechteckigen Querschnitt kann man ebenso leicht wie für den elliptischen nachweisen, dass für eine im Verhältnisse zu den Radien der Windungen sehr kleine Steigung und sehr kleine Seiten des Querschnittes jene Glieder, welche vom Normaldrucke, der Abscheer- und Biegungskraft herrühren, bezüglich jenes Gliedes, welches von der Torsion herrührt, vernachlässigt werden können; darnach kann man

$$f = \frac{l}{F} P B \frac{(r_1^2 + r_0^2)}{2}$$

annehmen; nennt man b die zur y-Achse und c die zur z-Achse parallele Seite des Rechteckes, und setzt voraus, dass $b < c$, so hat man $B = \frac{1}{\beta b^3 c}$ und folgt somit

$$f = \frac{l P (r_1^2 + r_0^2)}{2 F \beta b^3 c},$$

worin β eine Function von $\frac{c}{b}$ ist und den in der Tabelle Nummer 18 angegebenen Zahlenwerth hat.

Der maximale, tangentiale Zug, welcher durch das Torsionsmoment $M_x = P r$ hervorgebracht wird, tritt im Mittelpunkte der grösseren Seiten auf und ist durch die Formel:

$$p_{zx} = \frac{P r}{\alpha b^2 c},$$

gegeben; für α, welches eine Function von $\frac{c}{b}$ ist, kann der Zahlenwerth aus der in Nummer 20 angeführten Tabelle entnommen werden. Der Werth von p_{zx} ist für die Kegelbasis oder für $r = r_1$ ein Maximum, wonach für das Gleichgewicht resultirt:

$$\frac{P r_1}{\alpha b^2 c} = R_t.$$

Setzt man den aus dieser Gleichung bestimmten Werth von P in den Ausdruck von f ein, so erhält man:

$$f = \frac{\alpha}{\beta} \frac{l (r_1^2 + r_0^2)}{2 F r_1 b} R_t.$$

Für den quadratischen Querschnitt hat man $c = b$ und

$$\frac{P r_1}{0{\cdot}20817\, b^3} = R_t,$$

$$f = \frac{P l (r_1^2 + r_0^2)}{0{\cdot}28116\, F b^4} = \frac{l (r_1^2 + r_0^2)}{1{\cdot}3506\, F r_1 b} R_t.$$

VII. Capitel.

Widerstand der Federn gegen Stösse.

32. Die Federn sind der Einwirkung einer Kraft ausgesetzt, deren Angriffspunkt sich nach einer geraden Linie verschiebt. — Denken wir uns einen elastischen Körper, dessen Lage durch einen Fixpunkt, durch die Richtung eines Elementes einer Linie, welche durch diesen Punkt geht, und durch das Element einer Ebene, welche durch das Element der Linie geht, bestimmt ist.

Nehmen wir an, dass dieser Körper an irgend einem Punkte von einem andern gestossen wird und beide zusammen vibriren. Die strenge Untersuchung der Gesetze, nach welchen die Deformationen der beiden Körper während der Vibration auftreten, daher auch die Bestimmung der inneren Kräfte in Functionen der Zeit, ist eines der schwierigsten Probleme der Elasticitätstheorie und bis jetzt, einige sehr einfache Fälle ausgenommen, nicht vollkommen gelöst.

Wenn man als gestossenen Körper eine im Verhältnisse zum stehenden Körper sehr kleine Masse hat, derart, dass man selbe als Null betrachten kann, und der stossende Körper als vollkommen unelastisch betrachtet wird, so wird die Lösung der Aufgabe viel einfacher; daher werden wir bei Anwendung für die Federn nur diesen Fall behandeln, nachdem für dieselben im Allgemeinen beide gemachten Annahmen zutreffen.

Nachdem wir speciell jene Umstände in Betracht ziehen, welche in der Praxis am häufigsten vorkommen, setzen wir voraus, dass der Berührungspunkt zwischen dem stossenden und gestossenen Körper auf einer geraden Linie oscillirt, auf welcher sich auch besagter Punkt in Folge der Einwirkung der Kraft F, welche nach dieser Geraden gerichtet ist, verschiebt.

Dieses festgestellt, nehmen wir an, dass nach der Zeit t der Angriffspunkt des stossenden Körpers sich in der Entfernung y von seiner Gleichgewichtslage befindet, wenn auf die Feder keine Kraft einwirkt, und nennen

P das Gewicht des stossenden Körpers,

α den Winkel, welchen die Bewegungsrichtung mit der Verticalen einschliesst,

f die statische Verschiebung, welche der Angriffspunkt des stossenden Körpers in Folge einer Kraft erleiden würde, welche dem Gewichte P gleich ist, und nach und nach in der Bewegungsrichtung wirkt.

Damit die Kraft die Verschiebung y erhält, welche nach der Zeit t eintritt, muss dieselbe offenbar die Intensität $P\frac{y}{f}$ haben, daher ist die beschleunigende Kraft am Ende der Zeit t

$$P\cos\alpha - P\frac{y}{f};$$

die beschleunigende Kraft ist auch ausgedrückt durch

$$\frac{P}{g}\frac{d^2y}{dt^2};$$

demnach besteht die Gleichung:

$$\frac{P}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = P\cos\alpha - P\frac{y}{f}, \quad \text{oder auch} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g\cos\alpha - \frac{gy}{f}.$$

Weil $\frac{dy}{dt}$ die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t ist, wird offenbar die maximale Geschwindigkeit mit dem Werthe von y correspondiren, welcher $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ ergibt; daher erhält man sofort

$$y = f\cos\alpha$$

für den Werth von y, welcher dem Punkte der maximalen Geschwindigkeit entspricht.

Um nun die Integration durchzuführen, stellen wir die Bedingung auf, dass für $t = 0$, $\frac{dy}{dt} = V$, $y = 0$ wird, d. h. wir nehmen als Ausgangspunkt für die Zeit den Moment, in welchem der Körper durch seine Gleichgewichtslage geht, und nennen V die Geschwindigkeit, welche in diesem Augenblicke der stossende Körper hat.

Dieses festgestellt, die beiden Glieder der Differentialgleichung mit dy multiplicirt und unter der Bedingung integrirt, dass für $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = V$ wird, resultirt:

$$\frac{P}{2g}\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - V^2\right] = P\,y\cos\alpha - P\,\frac{y^2}{2f}.$$

Das erste Glied dieser Gleichung drückt die lebendige Kraft des Systemes (oder des stossenden Körpers allein, nachdem wir die Masse des gestossenen Körpers gleich Null angenommen haben) aus, welche dasselbe erlangt, während es den Weg von der Gleichgewichtslage bis zu jener, von der Ordinate y bestimmt, zurücklegt; das zweite Glied gibt die in derselben Zeit von den auf das System wirkenden Kräften geleistete Arbeit, diese Kräfte sind das Gewicht P und die elastischen Kräfte; thatsächlich ist der verticale Weg des Gewichtes P gleich $\cos\alpha$, wonach $P\,y\cos\alpha$ die Arbeit des Gewichtes P ist; die an dem gestossenen Körper in der Richtung der Bewegung angreifende Kraft, welche den elastischen Kräften in der durch die Ordinate y bestimmten Lage das Gleichgewicht halten würde, ist, wie wir schon sagten, $\frac{Py}{f}$, demnach $\frac{P\,y\,dy}{f}$ das Element der Arbeit der elastischen Kräfte, und $\frac{Py^2}{2f}$ die totale Arbeit während der Deformation des gestossenen Körpers, wenn derselbe von der Gleichgewichtslage in jene kommt, welche durch die Ordinate y bestimmt ist.

Man sieht also, dass man das erste Integral der Bewegungsgleichung unmittelbar aus dem Lehrsatze für die lebendige Kraft erhalten kann, wenn man ebensowohl die äusseren, als elastischen Kräfte berücksichtigt.

Will man den Maximalwerth y_1 von y bestimmen, so muss man $\frac{dy}{dt} = 0$ setzen, woraus nach vorgenommener Division durch P folgt:

$$-\frac{V^2}{2g} = y_1\cos\alpha - \frac{y_1^2}{2f},$$

und daher

$$y_1 = f\cos\alpha \pm \sqrt{f^2\cos^2\alpha + \frac{f}{g}V^2}.$$

Das obere Zeichen gibt uns die maximale Verschiebung im Sinne der Geschwindigkeit V und das untere die maximale Verschiebung im entgegengesetzten Sinne; demnach ist die Grösse der ganzen Oscillation

$$2\sqrt{f^2\cos^2\alpha + \frac{f}{g}V^2}.$$

Wenn $V = 0$ ist oder das Gewicht P auf einmal wirkt, d. h. nicht in unendlich kleinen Abstufungen von Null bis zu seinem schliesslichen Werthe, so wird die Grösse der Oscillationen $2\,f\cos\alpha$ oder das Doppelte der Verschiebung, welche der Angriffspunkt des Gewichtes erleiden würde, wenn dasselbe langsam angreift, nämlich so, dass in jedem Augenblicke zwischen den wirkenden Theilen des Gewichtes und den inneren elastischen Kräften Gleichgewicht herrscht. Im Falle $V = 0$, sind die beiden Werthe von y_1 gleich $2\,f\cos\alpha$ und 0, so dass die Oscillationen zwischen der ursprünglichen Lage und jener stattfinden, welche der maximalen Verschiebung von $y = 2\,f\cos\alpha$ entspricht.

Die Geschwindigkeit der Oscillationen in irgend einem Punkte ist durch die Gleichung

$$\frac{P}{2g}\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - V^2\right] = P\,y\cos\alpha - P\frac{y}{2f},$$

gegeben, woraus man erhält:

$$dt = \frac{dy}{\sqrt{V^2 + 2\,g\,y\cos\alpha - \frac{g\,y^2}{f}}} = \frac{dy}{\sqrt{V^2 + g\,f\cos^2\alpha - \frac{g}{f}\left(f\cos\alpha - y\right)^2}}.$$

Integrirt man unter der Bedingung, dass für $t = 0$ $y = 0$ wird, so erhält man:

$$t = \sqrt{\frac{f}{g}}\left[\text{arc cos}\ \frac{f\cos\alpha - y}{\sqrt{\frac{f\,(V^2 + g\,f\cos^2\alpha)}{g}}} - \varphi\right],$$

darin ist

$$\varphi = \text{arc cos}\ \frac{\sqrt{g\,f}\cos\alpha}{\sqrt{V^2 + g\,f\cos^2\alpha}}$$

und demnach

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{g\,f}\cos\alpha}{\sqrt{V^2 + g\,f\cos^2\alpha}}, \qquad \sin\varphi = \frac{V}{\sqrt{V^2 + g\,f\cos^2\alpha}}.$$

Aus dem erhaltenen Integrale ergibt sich:

$$f\cos\alpha - y = \sqrt{\frac{f(V^2 + g f\cos^2\alpha)}{g}}\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{f}} + \varphi\right)$$

oder nach Entwicklung und Substituirung der Werthe von *cos* φ und *sin* φ:

$$y = f\cos\alpha\left(1 - \cos t\sqrt{\frac{g}{f}}\right) + V\sqrt{\frac{f}{g}}\sin t\sqrt{\frac{g}{f}}.$$

Man sieht aus dieser Formel, dass y eine periodische Function der Zeit t und dass die Periode $2\pi\sqrt{\frac{f}{g}}$ ist, weil sich der Werth von y nicht ändert, wenn man $t + 2\pi\sqrt{\frac{f}{g}}$ für t setzt. Folglich ist die Dauer einer ganzen Schwingung des gestossenen Körpers oder jene von zwei einfachen Oscillationen:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{f}{g}},$$

somit dieselbe wie für ein einfaches Pendel von der Länge f.

Für die praktische Anwendung dieser Formel muss bemerkt werden, dass die Längen f und g mit derselben Masseinheit ausgedrückt werden müssen, und dass ferner die Beschleunigung der Schwere g mit der Zeiteinheit, mit welcher die Zeiten t und τ gemessen wurden, correspondiren muss. Wenn man daher f und g in m und die Zeit in Secunden ausdrücken will, muss man $g = 9{\cdot}806\ m$ für 45° geographischer Breite und am Meeresspiegel annehmen.

Die Anzahl der ganzen Schwingungen in 1″ wird sein:

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{f}};$$

hat man beispielsweise $f = 0{\cdot}04\ m$, so resultirt:

$$n = \frac{1}{6{\cdot}28}\sqrt{\frac{9{\cdot}806}{0{\cdot}04}} = 2{\cdot}493,$$

oder mit grosser Annäherung fünf einfache Schwingungen in der Secunde.

Die bisher entwickelten Formeln kann man für alle Federn anwenden, auf welche eine Kraft derart wirkt, dass selbe sich bei der

Deformation der Feder in fühlbarer Weise nach einer geraden Linie verschiebt; somit auf die an einem Ende festgespannte Feder (Nummer 2 und 3), auf die zusammengesetzten Blattfedern, auf die cylindrische und konische Schraubenfeder, wenn selbe im Sinne der Achse der Schraube comprimirt werden.

Für alle diese Fälle jedoch muss man das Gewicht P des stossenden Körpers und seine Geschwindigkeit V in dem Augenblicke kennen, wenn derselbe die Feder zu berühren beginnt; zuerst bestimmt man die Deformation f, welche in der Feder durch eine mit dem Gewichte P gleich grosse Kraft erzeugt würde, welche in der Richtung der Bewegung wirkt, worauf man die maximale Deformation, welche durch den Stoss erzeugt wird, mittelst folgender Formel erhält:

$$y_1 = f \cos \alpha + \sqrt{f^2 \cos^2 \alpha + \frac{f}{g} V^2}.$$

Kennt man dann für jeden speciellen Fall den maximalen Werth der inneren elastischen Kräfte für eine gegebene Deformation der Feder, so wird man den maximalen Werth der elastischen Kräfte für die Deformation y_1 erhalten.

Für die rechteckige, an einem Ende eingespannte Feder haben wir in Nummer 2 die Formel

$$f = \frac{2 l^2 T}{c E}$$

gefunden, worin T den maximalen Zug oder Druck pro Flächeneinheit darstellt, welcher in der Feder auftritt, wenn die Pfeilhöhe der Durchbiegung f ist; wenn nun die Pfeilhöhe y_1 ist, wird die maximale Beanspruchung pro Flächeneinheit durch folgende Formel gegeben sein:

$$T = \frac{c E y_1}{2 l^2}.$$

Wenn die Verschiebung des Punktes der Feder, welcher den Stoss des Körpers P empfängt, vertical ist, so hat man $\cos \alpha = 1$ und

$$y_1 = f + \sqrt{f^2 + \frac{f}{g} V^2};$$

ist dagegen die Verschiebung des gestossenen Punktes der Feder horizontal, so wird $\cos \alpha = 0$, und

$$y_1 = V\sqrt{\frac{f}{g}}.$$

33. Federn, welche einer Drehung um ihre Achse in Folge der Wirkung eines Kräftepaares unterworfen sind. — Wir betrachten einen Körper, dessen Lage in derselben Weise, wie in der vorigen Nummer auseinandergesetzt wurde, fixirt ist, und nehmen an, dass derselbe gleichzeitig an zwei Punkten durch zwei Körper vom Gewichte P gestossen werde, welche im Augenblicke des Stosses gleiche und entgegengesetzte, aber nicht entgegenwirkende Geschwindigkeit haben; ferner nehmen wir noch an, dass die beiden stossenden Körper nach dem Stosse zusammen um den gestossenen Körper schwingen.

Wir werden die Gesetze der Schwingungen und die specifischen maximalen Beanspruchungen des gestossenen Körpers bestimmen, indem wir die Masse des letzteren vernachlässigen, wie man es im Allgemeinen bei den Federn machen kann, und die stossenden Körper als vollkommen unelastisch betrachten.

Wir nehmen an, dass A (Fig. 23) das Element der Ebene sei, welches die Position des gestossenen Körpers bestimmt, C und C' die beiden Punkte, in denen der Stoss stattfindet, und B der Mittelpunkt der Geraden CC', welch' letztere auf AB senkrecht steht; die Geschwindigkeit der stossenden Körper im Augenblicke des Stosses sei senkrecht zur Ebene ABC. Nehmen wir schliesslich noch an, dass unter dem Einflusse von zwei Kräften, welche in C und C' angreifen, zur Ebene ABC senkrecht stehen, gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, und in unendlich kleinen Abstufungen von Null bis zum Gewichte P wachsen, sich der gestossene Körper derart deformirt, dass sich die Gerade CC' um den Winkel θ dreht; aus dem Verhältnisse zwischen den Kräften und Verschiebungen folgt, dass in den Punkten C und C' zwei Kräfte $P' = \frac{\theta'}{\theta} P$ wirken müssen, um die Drehung θ' der Geraden CC' hervorzubringen. Wenn die Gerade CC', auf welche die stossenden Gewichte wirken, nach der Zeit t mit der ursprünglichen Lage einen Winkel θ' einschliesst, so wird für die von den stossenden Gewichten erzeugten Oscillationen, $CC' = 2r$ gesetzt,

$$-2Pr = -2Pr\frac{\theta'}{\theta}$$

das Moment des beschleunigenden Kräftepaares oder die Summe der beschleunigenden Kräfte bezüglich der Geraden AB sein. Nun ist bekannt, dass die Summe der Momente der beschleunigenden Kräfte durch die Formel $\frac{I}{g}\frac{d^2\theta'}{dt^2}$ gegeben ist, worin I das Trägheitsmoment des ganzen Systemes bezüglich der Geraden AB bedeutet; wenn wir die Masse des gestossenen Körpers vernachlässigen, haben wir einfach $I = 2Pr^2$, und daraus die Gleichung:

$$\frac{Pr^2}{g}\frac{d^2\theta'}{dt^2} = -\frac{\theta'}{\theta}Pr.$$

Multiplicirt man mit $d\theta'$ und integrirt unter der Bedingung, dass für $\theta' = \theta$, oder auch für die ursprüngliche Lage der Geraden CC', ω die Winkelgeschwindigkeit derselben Geraden sei, so erhält man:

$$\frac{Pr^2}{2g}\left[\left(\frac{d\theta'}{dt}\right)^2 - \omega^2\right] = -\frac{\theta'^2}{2\theta}Pr,$$

eine Gleichung, welche das Princip der lebendigen Kräfte für den Körper enthält, den wir studiren, und sich deshalb auch direct aufschreiben lässt, ohne die Differentialgleichung zweiten Grades zu Hilfe zu nehmen.

Trennt man die Variabeln in der letzten Gleichung und integrirt dann unter der Bedingung, dass für $t = 0$ $\theta' = 0$ ist, so resultirt:

$$t = \sqrt{\frac{r\theta}{g}}\ \text{arc sin}\left(\frac{\theta'}{\omega}\sqrt{\frac{g}{r\theta}}\right),$$

und daraus:

$$\theta' = \omega\sqrt{\frac{r\theta}{g}}\sin t\sqrt{\frac{g}{r\theta}},$$

$$\frac{d\theta'}{dt} = \omega\cos t\sqrt{\frac{g}{r\theta}}.$$

Man sieht, dass sich weder der Werth von θ' noch jener von $\frac{d\theta'}{dt}$ ändert, wenn man t um die Grösse $2\pi\sqrt{\frac{r\theta}{g}}$ vermehrt, demnach ist θ'

eine periodische Function mit der Periode $2\pi\sqrt{\frac{r\theta}{g}}$, d. h. die Dauer der doppelten Schwingungen der Geraden CC' ist:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{r\theta}{g}},$$

wie bei einem einfachen Pendel von der Länge $r\theta$.

Die Anzahl der doppelten Schwingungen in einer Secunde ist:

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r\theta}},$$

worin g und r mit derselben Masseinheit ausgedrückt, und g als Beschleunigung der Schwere pro Secunde angenommen sind.

θ' nimmt für $t\sqrt{\frac{g}{r\theta}} = \frac{\pi}{2}$ seinen Maximalwerth an, nämlich:

$$\Theta = \omega\sqrt{\frac{r\theta}{g}}.$$

Obige Theorie ist für die prismatische, auf Torsion beanspruchte Feder, für die ebene Spiralfeder und cylindrische Schraubenfeder, beide auf Verdrehung beansprucht, anwendbar.

Mit den in den vorhergehenden Capiteln gegebenen Formeln kann man entweder die Winkelverschiebung θ bestimmen, welche eintritt, wenn in den beiden Punkten C und C', auf die der Stoss erfolgt, nach und nach senkrecht zur Ebene ABC zwei von Null bis zum Werthe P wachsende Kräfte einwirken, oder die specifische, elastische Maximalspannung, welche durch die Einwirkung obiger Kräfte hervorgebracht wird. Wenn daher die Geschwindigkeit V gegeben ist, mit welcher die beiden Körper P auf die Gerade CC' stossen, und damit auch die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{V}{r}$ derselben zu Beginn der Bewegung, so erhält man die maximale Winkelverschiebung der Geraden CC' mit

$$\Theta = \omega\sqrt{\frac{r\theta}{g}},$$

und schliesslich die specifische, elastische Maximalspannung in Folge des Stosses, indem man die für den Fall, als die Winkelverschiebung θ ist, schon berechnete elastische Maximalspannung mit $\frac{\Theta}{\theta}$ multiplicirt.

Beispielsweise haben wir für die ebene Spiralfeder in Nummer 15 gefunden, dass der Verdrehungswinkel und der specifische Maximalzug, in Folge der Einwirkung eines Kräftepaares mit dem Momente M_0, welches die Feder zu drehen strebt, durch die Formeln gegeben sind:

$$\theta = \frac{12\, M_0\, l}{E\, b\, c^3}, \qquad R = \frac{E\, c}{2\, l}\, \theta;$$

setzt man $M_0 = 2\, P\, r$, so resultirt:

$$\theta = \frac{24\, P\, r\, l}{E\, b\, c^3},$$

und substituirt man diesen Werth in die Formel:

$$\Theta = \omega \sqrt{\frac{r\, \theta}{g}},$$

so erhält man die maximale Winkelverschiebung in Folge des Stosses und daraus den specifischen Maximalzug:

$$R = \frac{E\, c}{2\, l}\, \Theta.$$

Wenn man will, dass die specifische, maximale Beanspruchung und der Verdrehungswinkel Θ bestimmte Werthe annehmen, wird man $\frac{c}{l}$ aus der letzten und θ aus der vorletzten Gleichung herausziehen; die drittletzte Formel gibt uns eine Gleichung mit b und c; ist daher eine Seite des Querschnittes der Feder gegeben, so kann man die andere und auch die Länge der Feder bestimmen.

VIII. Capitel.

Ueber die Biegung von Körpern, welche aus übereinander gelegten Streifen zusammengesetzt sind, die aufeinander gleiten können.

34. Fundamental-Formeln. — Im zweiten Capitel, welches von den zusammengesetzten Blattfedern handelt, haben wir gezeigt, dass die Lösung der Aufgabe der Bestimmung des elastischen Gleichgewichtes für jene Federn sehr schwierig ist, wenn bei der Deformation die Blätter nur längs eines Theiles ihrer ganzen Länge aufeinander drücken. Wir wollen nun einige Betrachtungen anstellen, auf welche Art der Druck in irgend einem Punkte zwischen zwei übereinander liegenden Körpern zu bestimmen ist, welche während der Biegung in Berührung bleiben, wobei aber vorausgesetzt ist, dass kein Hinderniss, auch nicht die Reibung, das Gleiten der beiden Körper aufeinander verhindert. Wir werden annehmen, dass die übereinander gelegten Körper im Verhältnisse zu ihrer Länge sehr dünn sind, wie bei den Blattfedern, und dass auch die totale Dicke der übereinander gelegten Körper gegenüber dem anfänglichen und schliesslichen Krümmungsradius des Körpers sehr klein ist, so dass man die Krümmung der Achse für die verschiedenen aufeinander liegenden Körper als gleich betrachten kann.

Wenn man bei dem aus von einander unabhängigen Streifen zusammengesetzten Körper, welchen wir studiren wollen, einen Querschnitt AB (Fig. 24) vor der Biegung betrachtet, so setzt sich derselbe aus den Querschnitten der verschiedenen übereinander gelegten Körper zusammen, die alle in derselben Ebene liegen, während diese Querschnitte nach der Biegung, wie in der Figur dargestellt, nicht mehr in derselben Ebene sich befinden. Wir werden immer als Querschnitt des zusammengesetzten Körpers nach der Biegung den Complex der Querschnitte der verschiedenen Streifen ansehen, welche sich vor der Biegung in derselben Ebene befanden.

In Nummer 3 haben wir gesehen, dass für einen Körper, dessen Achse eine ebene Curve ist, zu deren Ebene die Biegungsachsen aller

Querschnitte senkrecht stehen, und welcher von Kräften beansprucht wird, die in derselben Ebene liegen, und bezüglich derselben symmetrisch angeordnet sind, und wenn man ferner benennt mit

ϱ den Krümmungsradius der Achse eines gegebenen Querschnittes vor der Biegung,

ϱ' den Krümmungsradius nach der Biegung,

I das Trägheitsmoment des betrachteten Querschnittes bezüglich seiner Biegungsachse,

M das Biegungsmoment in demselben Querschnitte,

E den Elasticitäts-Coëfficienten des Körpers,

hat man:

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EI},$$

und daraus erhält man:

$$M = E\,I\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho}\right).$$

Hat man also mehrere übereinander liegende Körper, welche in Berührung bleiben, während sie sich biegen, und für die man den Krümmungsradius ϱ und auch ϱ' gleich voraussetzt, so erhält man das Biegungsmoment, welchem jeder Körper in einem gegebenen Querschnitte widerstehen kann, indem man das Trägheitsmoment desselben Querschnittes mit der Grösse $E\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho}\right)$ multiplicirt, die für alle übereinander liegenden Körper gleich ist.

Man erhält daher die Summe der Biegungsmomente oder das totale Biegungsmoment, welchem der zusammengesetzte Körper in einem Querschnitte widerstehen kann, indem man die Grösse $E\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho}\right)$ mit der Summe der Trägheitsmomente der Querschnitte der übereinander liegenden Körper multiplicirt.

Man hat demnach dieselbe Formel, wie für die aus einem Stücke bestehenden Körper, und substituirt nur für das Trägheitsmoment des einzigen Querschnittes die Summe der Trägheitsmomente der Querschnitte der übereinander liegenden Körper, je auf die zum Querschnitte gehörige Schwerachse bezogen.

35. Differentialgleichung der vierten Ordnung der Curve, nach welcher sich die langen und dünnen Körper biegen. — Wenn ein langer und dünner Körper, wie jene, die wir betrachten, vor der Biegung geradlinig ist, hat man $\frac{1}{\varrho} = 0$, demnach folgt aus voriger Nummer:

$$\frac{EI}{\varrho'} = M.$$

Bezieht man die Achse des Körpers nach der Deformation auf zwei orthogonale Achsen, welche in der Ebene der Curve liegen und von denen jene der x die ursprüngliche Position der Achse des Körpers ist, so hat man:

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

wenn die Biegung des Körpers sehr gering ist, wie es in der Praxis gewöhnlich vorkommt, so ist in allen Punkten $\frac{dy}{dx}$ sehr klein, daher kann man das Quadrat davon im Verhältnisse zur Einheit vernachlässigen und erhält somit:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \text{und ferner} \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = M.$$

Es ist bekannt, dass bei den sehr langen und dünnen Körpern die Derivate des Biegungsmomentes bezüglich des Bogens s der ursprünglichen Curve, oder in diesem Falle bezüglich der x-Achse, nichts Anderes ist, als die Abscheerspannung S, mit geändertem Zeichen genommen, demnach hat man $\frac{dM}{dx} = -S$; differenzirt man also die vorstehende Gleichung nach x, so erhält man:

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = -S.$$

Natürlich gilt diese Formel nur für jenen Theil, in welchem die Function M eine natürliche ist, und nicht für den Uebergang von einem

Theile zum andern; wenn deshalb in einigen Punkten des Körpers isolirte Kräfte angreifen, muss man jeden Theil separat betrachten, weil für zwei unendlich nahe Querschnitte, der eine rechts, der andere links vom Angriffspunkte einer isolirten Kraft, die beiden Werthe von S um eine bestimmte Grösse von einander differiren, welche der Kraft selbst gleich ist.

Wenn S die Abscheerspannung im Querschnitte mit der Abscisse x ist und in diesem Punkte eine nach einem gleichförmigen Gesetze vertheilte Kraft angreift, deren zur x-Achse normale Componente pro laufenden m die Intensität p hat, so wird offenbar $S' = S - p\,dx$ die Abscheerspannung im Querschnitte mit der Abscisse $x + dx$ sein, daraus folgt $\frac{dS}{dx} = -p$ und $\frac{d^2M}{dx^2} = p$; differenzirt man demnach die oben erhaltene Gleichung dritter Ordnung nach x, so resultirt:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = p,$$

welches die Differentialgleichung vierter Ordnung für die elastische Curve sehr langer und dünner Körper ist, deren Achse vor der Deformation geradlinig war.

Diese Gleichung kann man auch für den Fall anwenden, dass die Achse des Körpers schon vor der Deformation schwach gekrümmt war, indem man für y die Differenz $\eta = y_1 - y$ zwischen den schliesslichen und ursprünglichen Ordinaten eines Punktes der Achse des Körpers einsetzt.

Nimmt man als Veränderliche die Ordinate y und den Bogen s der Curve, so wird bekanntlich die Krümmung in irgend einem Punkte durch folgende Formel ausgedrückt:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}.$$

Nimmt man als x-Achse die Tangente an einem Punkte der Achse des Körpers, so wird der Werth von $\frac{dy}{ds}$ in unserem Falle in allen Punkten der Curve sehr klein, nachdem wir die Krümmung der Achse

des Körpers sehr gering vorausgesetzt haben; wir können deshalb unter dem Wurzelzeichen $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$ gegen die Einheit vernachlässigen und erhalten:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{ds^2}.$$

Gleicherweise kann man für die Curve nach der Deformation:

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{d^2 y'}{ds^2}$$

nehmen, worin das Element ds dasselbe wie in der Curve vor der Deformation ist, weil bei Vernachlässigung des normalen Druckes und der transversalen Verschiebung alle Elemente des Körpers vor und nach der Deformation den gleichen Werth beibehalten.

Wir haben demnach:

$$M = EI\frac{d^2(y' - y)}{ds^2} = EI\frac{d^2\eta}{ds^2}.$$

Andererseits wissen wir, dass $\frac{dM}{ds} = -S$ und $\frac{dS}{ds} = -p$ und $\frac{d^2 M}{ds^2} = p$; differenzirt man die letzte Gleichung nacheinander zweimal, so erhält man:

$$EI\frac{d^3\eta}{ds^3} = -S, \quad EI\frac{d^4\eta}{ds^4} = p;$$

die hier an dem Elemente ds wirkende Kraft $p\,ds$ muss normal zu diesem Elemente sein.

Nachdem $ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ und das Verhältniss $\frac{dy}{dx}$ nach der Annahme sehr klein ist, kann man $ds = dx$ nehmen und erhält:

$$EI\frac{d^3\eta}{dx^3} = -S, \qquad EI\frac{d^4\eta}{dx^4} = p.$$

36. Bestimmung des Druckes zwischen den Berührungsflächen der aufeinander liegenden und unabhängigen Streifen, welche sich gleichzeitig biegen. — Die in den zwei vorhergehenden Nummern entwickelten Betrachtungen und Formeln können zur Bestimmung des

Druckes oder Zuges dienen, welcher in irgend einem Punkte der Berührungsfläche zweier Streifen auftritt, wenn selbe gezwungen sind, ihrer ganzen Länge nach während der Deformation in Berührung zu bleiben; wenn sich die Streifen trennen können, so zeigt sich dies, indem die Formeln einen negativen Druck oder einen Zug ergeben.

Der Rechnungsvorgang ist sehr einfach; nennt man ΣI die Summe der Trägheitsmomente aller übereinander liegenden Körper im Punkte mit der Abscisse x, so wird die Differentialgleichung der Biegungscurve

$$E \Sigma I \frac{d^2 y}{d x^2} = M,$$

wobei M das Biegungsmoment der äusseren Kräfte in Bezug auf den betrachteten Querschnitt bedeutet. Betrachtet man nun einen der übereinander gelegten Körper als in der Abscisse x geschnitten, nennt I_n das Trägheitsmoment seines Querschnittes in diesem Punkte und m das Biegungsmoment, so besteht offenbar die Gleichung:

$$E I_n \frac{d^2 y}{d x^2} = m,$$

worin die Function $\frac{d^2 y}{d x^2}$ denselben Werth wie in vorstehender Gleichung hat. Dividirt man die beiden Gleichungen, so erhält man:

$$m = \frac{I_n}{\Sigma I} M,$$

worin die Grössen I_n, ΣI und M Functionen von x sind.

$\frac{d m}{d x}$ stellt die Abscheerkraft im Punkte mit der Absisse x für den betrachteten Körper vor, und $\frac{d^2 m}{d x^2}$ die Kraft p, welche pro laufenden Meter in jenem Punkte wirkt. Diese beiden Functionen sind im Allgemeinen unstetig beim Uebergange von einem Blatte zu einem andern; die Differenz zwischen den zwei Werthen von $\frac{dm}{dx}$, welche mit dem den beiden Stücken gemeinsamen Werthe correspondiren, stellt eine bestimmte Kraft vor, welche in diesem Punkte angreift.

Wenn die verschiedenen übereinander liegenden Körper gezwungen sind, in Berührung zu bleiben, wenn sie auch aufeinander gleiten können,

kann ein Zug zwischen dem einen und anderen Körper auftreten, und die obigen Formeln geben uns eine vollständige Lösung der Aufgabe. Wenn dagegen die übereinander gelegten Körper nicht gezwungen sind, in Berührung zu bleiben, wie dies häufig der Fall ist, so folgt offenbar, dass, im Falle die obigen Formeln in irgend einem Punkte zwischen den beiden Körpern einen Zug ergeben, dieselben nicht in Berührung miteinander verbleiben werden, und deshalb sind die gegebenen Formeln nicht mehr anwendbar.

Zur besseren Beleuchtung obiger Theorie werden wir ein Beispiel geben.

Wir betrachten (Fig. 25) eine zusammengesetzte Blattfeder, deren einzelne Blätter die Breite b und die Dicke c haben; die drei oberen Blätter sind von derselben Länge, Breite und bis zu den Enden von gleicher Dicke; dagegen sind alle anderen an jedem Ende, welches über das darunter liegende Blatt hervorragt, zugeschnitten, und zwar nach einem parabolischen Bogen zweiter Ordnung mit dem Scheitel am Ende und die Achse horizontal, und das ebenso im Sinne der Dicke als der Breite, wie in der Figur dargestellt ist.

Betrachtet man das Stück der Feder zwischen den mit den Punkten D, E correspondirenden Querschnitten, nennt λ die Länge dieses Stückes, b die Breite des Blattes und c die Dicke, so ist offenbar im Querschnitte $F\,G$ in der Entfernung x von E die Breite des unteren Blattes $b\sqrt{\frac{x}{\lambda}}$ und die Dicke $c\sqrt{\frac{x}{\lambda}}$, demnach wird

$$\frac{1}{12}\,b\,c^3\,\frac{x^2}{\lambda^2}$$

das Trägheitsmoment des Querschnittes sein.

Wenn das betrachtete Stück das n^{te} vom Ende A aus gerechnet ist, so wird

$$\left(n+1+\frac{x^2}{\lambda^2}\right)\frac{b\,c^3}{12}$$

die Summe der Trägheitsmomente der Querschnitte der $n+2$ durch $F\,G$ geschnittenen Blätter sein.

A

Fig.5.

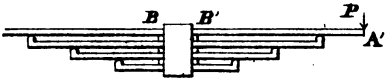


Fig.10.

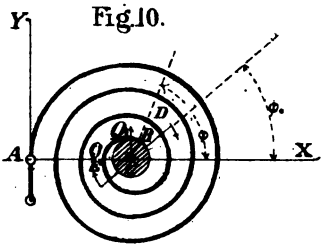


Fig.11.

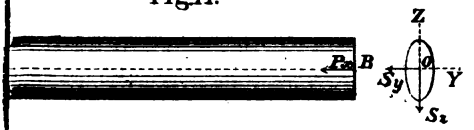


Fig.16.

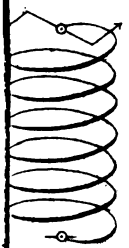


Fig.17.

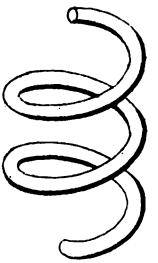
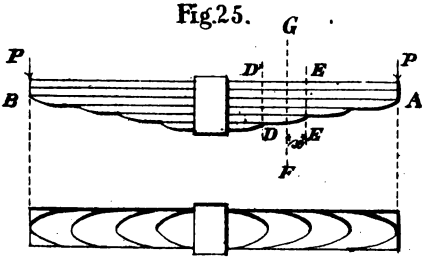


Fig.25.



Lith.Anst.v.Th. Bannwarth, Wien.

Das Biegungsmoment des am Ende A der Feder angreifenden Gewichtes P ist $P\,[(n-1)\,\lambda + x]$; nimmt man daher an, dass wohl alle Blätter aufeinander gleiten können, aber sonst in Berührung bleiben müssen, so hat man für das obere Blatt im Stücke zwischen den Querschnitten D und E das Biegungsmoment:

$$m = \frac{P\,[(n-1)\,\lambda + x]}{n+1+\frac{x^2}{\lambda^2}} = P\,\lambda^2\,\frac{(n-1)\,\lambda + x}{(n+1)\,\lambda^2 + x^2}.$$

Die Abscheerspannung im Punkte mit der Abscisse x ist durch folgende Formel gegeben:

$$\frac{dm}{dx} = P\,\lambda^2\left[\frac{1}{(n+1)\,\lambda^2 + x^2} - 2\,x\,\frac{(n-1)\,\lambda + x}{[(n+1)\,\lambda^2 + x^2]^2}\right].$$

Setzt man $x = 0$, so erhält man:

$$\frac{dm}{dx} = \frac{P}{n+1},$$

und $x = \lambda$:

$$\frac{dm}{dx} = \left(\frac{1}{n+2} - \frac{2\,n}{(n+2)^2}\right) P.$$

Diese Werthe beziehen sich auf die Querschnitte E' und D' vom Stücke $E'D'$, oder mit anderen Worten, man kann sie als die Abscheerspannungen in den beiden den Punkten D', E' unendlich nahen, aber innerhalb des Stückes gelegenen Querschnitten betrachten.

Will man dagegen den Werth der Abscheerspannung für das obere Blatt in einem dem Punkte D' unendlich nahen, aber links davon gelegenen Querschnitte bestimmen, so muss man das $(n+1)^{te}$ Stück in Betracht ziehen und $x = 0$ setzen, was ergibt:

$$\frac{dm}{dx} = \frac{1}{n+2}.$$

Somit hat man in zwei unendlich nahen Punkten, der eine rechts, der andere links von D' gelegen, zwei Abscheerspannungen:

$$\left(\frac{1}{n+2} - \frac{2\,n}{(n+2)^2}\right) P, \text{ und } \frac{P}{n+2},$$

deren Differenz:

$$\frac{2Pn}{(n+2)^2}$$

eine bestimmte Kraft vorstellt, welche im oberen Blatte im Punkte D' angreift und nach abwärts gerichtet ist; diese Kraft kann nichts Anderes als ein Zug sein, welchen das zweite Blatt auf das erste ausübt, und ohne weitere Untersuchung lässt sich die Behauptung aufstellen, dass sich bei der betrachteten Feder die Blätter in einigen Punkten von einander trennen werden, wenn nicht besondere Vorkehrungen getroffen sind, dass selbe in Berührung bleiben müssen.

Wenn die Blätter statt nach einem parabolischen Profile im horizontalen Sinne mit einer halben Ellipse und im verticalen Sinne nach einer Viertel-Ellipse endigen, so findet man leicht, dass die Abscheerkräfte in zwei unendlich nahen Querschnitten, der eine rechts, der andere links von D', gleich sind, weshalb die oben besprochene Schwierigkeit nicht eintritt; nimmt man aber die zweite Derivate $\frac{d^2 m}{dx^2}$, so findet man, dass die Kraft p, welche die Wirkung zwischen dem ersten und zweiten Blatte darstellt, an vielen Stellen einen Zug ergibt, woraus folgt, dass sich die Blätter auf einigen Strecken von einander trennen.

Diese Betrachtungen zeigen die Schwierigkeit, welche die Aufgabe der Blattfedern bietet, wenn nicht die Form der Blätter derart gewählt wird, dass die unten liegende nur an den Enden gedrückt wird.

37. Druck eines prismatischen, mit Gewichten belasteten Körpers auf eine horizontale, elastische Ebene, auf welcher derselbe der ganzen Länge nach aufliegt. — Diese Aufgabe kommt im Eisenbahnbau vor zur Bestimmung des Druckes, welchen die Lang- oder Querschwellen auf die Unterlage ausüben; wir benützen dieselbe nur zur Anwendung der Gleichung vierten Grades:

$$EI\frac{d^4 y}{dx^4} = p,$$

die in Nummer 31 erhalten wurde. Wenn wir annehmen, dass der unter dem Prisma liegende unbekannte Körper in jedem Punkte einen specifischen Druck erleidet, welcher der Einsenkung seiner Oberfläche proportional ist, und die Prisma-Achse vor der Deformation als x-Achse

wählen und mit y die Ordinate derselben Achse nach der Deformation für den Punkt mit der Abscisse x bezeichnen, so wird y gleichzeitig auch die Einsenkung der darunter liegenden Ebene und $C\,y\,d\,x$ der Druck auf das Element $d\,x$ im besagten Punkte sein, wobei C eine Constante ist; wenn der Balken durch ein nach irgend einem Gesetze vertheiltes, continuirliches Gewicht belastet ist und mit $q\,d\,x$ die auf dem Elemente $d\,x$ wirkende Last bezeichnet wird, so ist offenbar die im besagten Elemente, im Sinne von y positiv wirkende, resultirende Kraft $(q - C\,y)\,d\,x$, woraus man die Differentialgleichung vierten Grades erhält:

$$E\,I\,\frac{d^4\,y}{d\,x^4} = q - C\,y.$$

Wenn der Balken nur von einer nach einem continuirlichen Gesetze vertheilten Last und auch von einzelnen Gewichten belastet ist, muss man diese Gleichung für jedes Stück zwischen zwei Einzelgewichten getrennt anwenden.

Der in der Praxis am häufigsten vorkommende Fall ist der, dass das gleichförmig vertheilte Gewicht das Eigengewicht des Körpers ist; dann muss man q als Constante betrachten, und die Gleichung lässt sich leicht integriren, wenn man zuerst den constanten Ausdruck verschwinden macht, indem man $y = z + \frac{q}{C}$ setzt. Da aber das Eigengewicht des Körpers im Verhältnisse zu den Einzellasten im Allgemeinen sehr klein ist, kann man dasselbe vernachlässigen, und die Differentialgleichung wird somit

$$E\,I\,\frac{d^4\,y}{d\,x^4} = -\,C\,y.$$

Mittelst bekannter Methode lässt sich leicht finden, wenn man mit k den numerischen Werth von $\sqrt[4]{\frac{C}{4\,E\,I}}$ benennt, dass die in Betracht stehende Differentialgleichung als completes Integral von folgender Form ist:

$$y = (A_1\,e^{k\,x} + A_2\,e^{-k\,x})\cos k\,x + (B_1\,e^{k\,x} + B_2\,e^{-k\,x})\sin k\,x,$$

wenn man mit A_1, A_2, B_1 und B_2 vier willkürliche Constante bezeichnet.

Wir haben schon gesagt, dass man diese Gleichung für jedes Stück zwischen zwei Einzellasten separat anwenden muss; wenn daher beispielsweise der Körper von drei Gewichten belastet und somit in vier Theile getheilt ist, hat man sechzehn Constante zu bestimmen. An jedem Ende ist nun das Biegungsmoment und die Abscheerspannung Null, oder auch an den Enden muss $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ sein, wonach vier Bedingungsgleichungen für die willkürlichen Constanten bestehen.

Ferner müssen in jedem Angriffspunkte einer Einzellast oder in jedem Trennungspunkte zwischen zwei Stücken die Ordinate y und die Derivaten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ denselben Werth haben, sowohl wenn man den Punkt als Ende des einen oder als Anfang des anderen Stückes betrachtet; dagegen muss das Product $-EI\frac{d^3y}{dx^3}$, welches die Abscheerspannung darstellt, beim Uebergange vom Ende des einen Stückes zum Anfange des nächsten den Werth ändern, und die Differenz wird dem Gewichte gleich, welches die beiden Stücke trennt. In jedem Angriffspunkte einer Last hat man vier Bedingungsgleichungen, welche zur Bestimmung aller Constanten genügen.

Ferner kommt es häufig vor, dass der Balken in Bezug auf die Mitte symmetrisch belastet ist, was dann die Rechnung vereinfacht. Wenn der Körper von einer geraden Zahl von Gewichten belastet ist, so dass man in der Mitte ein Stück des Körpers hat, und man als Ursprung der Abscissen den Mittelpunkt des Körpers nimmt, so muss offenbar das allgemeine Integral, auf das Mittelstück angewendet, derart sein, dass y weder das Zeichen noch den Werth ändert, wenn x das Zeichen ändert, oder wenn man die von der Mitte aus äquidistanten Punkte betrachtet; es ist somit erforderlich, dass $A_2 = A_1$ $B_2 = -B_1$ ist, wonach das Integral

$$y = A_1 (e^{kx} + e^{-kx}) \cos kx + B_1 (e^{kx} - e^{-kx}) \sin kx$$

wird und nur zwei Constante enthält. Geht man nun vom Mittelstücke aus nur bis zu einem Ende, so kann man alle Constanten bestimmen.

Wenn in der Mitte ein Gewicht P wirkt, so hat man dort zwei Bedingungen, die eine, dass die Tangente horizontal oder $\frac{dy}{dx} = 0$, die andere, dass die Abscheerspannung gleich $-\frac{P}{2}$ sein muss, demnach $EI\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{P}{2}$; geht man daher von der Mitte bis nur zu einem Ende, so erhält man ebensoviele Gleichungen, als zur Bestimmung der Constanten nöthig sind.

38. Allgemeine Gleichung für die Schwingungen elastischer Körper um eine gerade Achse. — Als letzte Anwendung der Gleichung $EI\frac{d^4y}{dx^4} = p$ werden wir zeigen, wie man aus derselben unmittelbar die allgemeine Gleichung für die Schwingungen langer, dünner Körper um eine geradlinige Achse erhalten kann.

Nehmen wir die Achse horizontal an und betrachten das unendlich kleine Stück zwischen den Abscissen x und $x + dx$, benennen mit Ω die Fläche des Querschnittes des Körpers im betrachteten Punkte, mit $\bar{\omega}$ das specifische Gewicht des Materiales, aus welchem der Körper zusammengesetzt ist, so wird offenbar $\Omega\,\bar{\omega}\,dx$ das Gewicht des erwähnten unendlich kleinen Stückes, und daher $\Omega\,\bar{\omega}$ das Gewicht pro laufenden Meter im Punkte mit der Abscisse x.

Ist nun y die Ordinate in diesem Punkte bis zur Zeit t, so wird $\frac{dy}{dt}$ die Geschwindigkeit desselben Punktes in jenem Augenblicke und $\frac{d^2y}{dx^2}$ die beschleunigende Kraft für die Masseneinheit; daher wird die beschleunigende Kraft pro laufenden Meter im Punkte mit der Abscisse x

$$\frac{\Omega\,\bar{\omega}}{g}\,\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Diese Kraft muss man im umgekehrten Sinne der positiven y annehmen; daher wird die am Körper im Punkte mit der Abscisse x angreifende Kraft pro laufenden Meter

$$p = \Omega\,\bar{\omega} - \frac{\Omega\,\bar{\omega}}{g}\,\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichgewichtsgleichung. so resultirt:

$$E\,I\,\frac{d^4\,y}{d\,x^4} = \Omega\,\bar{\omega}\left(1 - \frac{1}{g}\,\frac{d^2\,y}{d\,t^2}\right).$$

oder auch

$$\frac{E\,I}{\Omega\,\bar{\omega}}\,\frac{d^4\,y}{d\,x^4} + \frac{1}{g}\,\frac{d^2\,y}{d\,t^2} = 1,$$

welches die gesuchte allgemeine Gleichung ist.

Mit der Integration dieser Gleichung werden wir uns nicht befassen, nachdem dies mehr eine Aufgabe der mathematischen Physik über den Widerstand der Körper ist.

Wenn die Achse des Körpers vertical ist, so wird die Gleichung von folgender Form:

$$\frac{E\,I}{\Omega\,\bar{\omega}}\,\frac{d^4\,y}{d\,x^4} + \frac{1}{g}\,\frac{d^2\,y}{d\,t^2} = 0.$$